А. Г. МОРДКОВИЧ

и начала математического анализа

классы

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

10-е издание, стереотипное

Москва 2009

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.141я721+22.161я721
М79

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106—5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01—666/5/7д от 29.10.2007)

Мордкович А. Г.
М79 Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. — 10-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 399 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01136-1

Учебник дает цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начал математического анализа. Отличительные особенности учебника — более доступное для школьников изложение материала по сравнению с традиционными учебными пособиями, наличие большого числа примеров с подробными решениями. Построение всего курса осуществляется на основе приоритетности функционально-графической линии.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.141я721+22.161я721

ISBN 978-5-346-01135-4 (общ.)
ISBN 978-5-346-01136-1 (ч. 1)

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Издательство «Мнемозина» подготовило учебный комплект для изучения в 10—11-м классах общеобразовательной школы курса алгебры и начал математического анализа на базовом уровне, предусмотренном государственным стандартом:

А. Г. Мордкович. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник.

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник.

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

У вас в руках первая книга комплекта — учебник.

Данным учебником можно пользоваться независимо от того, на какие учебные пособия по алгебре вы делали ставку со своими учениками в 7—9-х классах, — он в определенном смысле самодостаточен. Но все же наиболее комфортно будут чувствовать себя, работая с этой книгой, те учителя, которые используют в основной школе учебные пособия, созданные коллективом авторов под руководством А. Г. Мордковича. Эти учителя привыкли к особенностям стиля изложения, приоритету функционально-графической линии и реализации в нашем курсе алгебры концепции математического моделирования и математического языка; для них предлагаемый учебник — естественное продолжение курса алгебры основной школы.

Изложение материала в учебнике дается подробно и обстоятельно. Во многих случаях весь материал, который содержится в том или ином параграфе, вы не успеете рассмотреть на уроках, но это и не нужно, поскольку данная книга предназначена в первую очередь для неспешного домашнего чтения и изучения школьниками. Опираясь на учебник, учитель сам прекрасно разберется в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что порекомендовать им запомнить, а что просто прочитать дома (и, возможно, обсудить на следующем уроке в классе — в жанре беседы).

В тексте приведено много примеров с подробными решениями. На окончание решения примера указывает либо слово «ответ», либо значок ◁■. На окончание доказательства того или иного утверждения в необходимых случаях указывает значок ●. Часть текста дана петитом: изучать этот материал или нет — дело учителя.

Если сравнить этот учебник с нашим ранее издававшимся учебником для общеобразовательной школы (речь идет о книге А. Г. Мордковича «Алгебра и начала анализа. 10—11». Часть 1. Учебник. — М. : Мнемозина, 2000—2006), то главы 2—8 и 10 настоящего учебника текстуально практически совпадают с главами 1—8 упомянутого учебника, но произошли некоторые редакционные правки и сокращения (из-за уменьшения количества часов в неделю на изучение курса на базовом уровне). Две главы настоящего учебника являются новыми. Глава 1 носит характер повторения и расширения известного из курса алгебры основной школы материала о числовых функциях, а глава 9, написанная П. В. Семеновым, посвящена элементам теории вероятностей.

Издательство готовит методическое обеспечение данного курса: книгу для учителя и сборник контрольных работ. Вариант тематического планирования вы можете найти в конце данного учебника и на сайте www.ziimag.narod.ru

Автор

ГЛАВА 1

Числовые функции

§ 1. Определение числовой функции и способы ее задания

Напомним общие сведения о функциях, известные вам из курса алгебры основной школы.

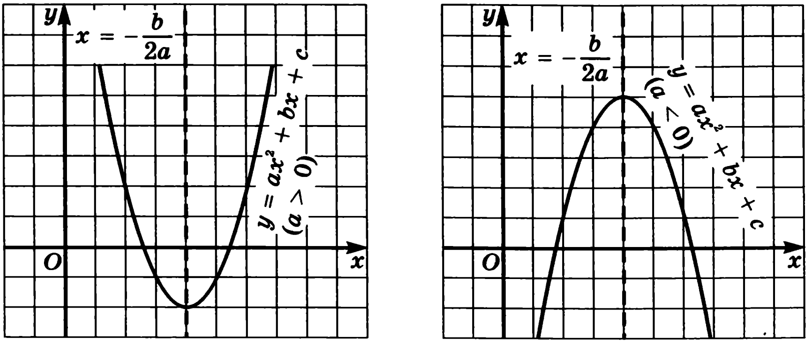
Определение 1. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана **функция** $y = f(x)$ **с областью определения** X. Пишут: $y = f(x)$, $x \in X$. Для области определения функции используют обозначение $D(f)$. Переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной.** Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Если $f(x)$ — алгебраическое выражение и область X определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения этого выражения (такую область определения называют *естественной*), то вместо записи $y = f(x)$, $x \in X$ используют более короткую запись $y = f(x)$.

Определение 2. Если дана функция $y = f(x)$, $x \in X$ и на координатной плоскости xOy отмечены все точки вида $(x; y)$, где $x \in X$, а $y = f(x)$, то множество этих точек называют **графиком функции** $y = f(x)$, $x \in X$.

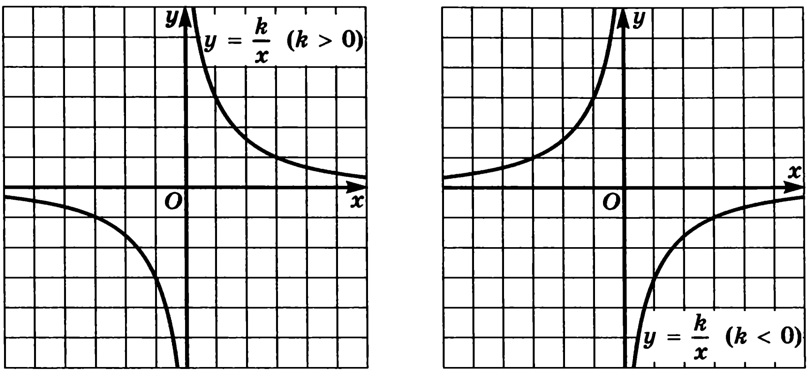
Если известен график функции $y = f(x)$, $x \in X$, то область значений функции можно найти, спроецировав график на ось ординат. То числовое множество, которое получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$.

Из курса алгебры основной школы вам известно, как выглядят графики некоторых функций: $y = kx + m$ — прямая, $y = ax^2 + bx + c$ — парабола (при $a \neq 0$, рис. 1), $y = \frac{k}{x}$ — гипербола (при $k \neq 0$, рис. 2); известны вам также графики функций $y = \sqrt{x}$ (рис. 3), $y = |x|$ (рис. 4).



а *б*

Рис. 1



а *б*

Рис. 2

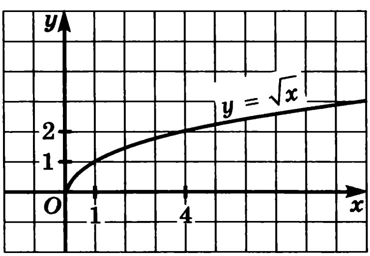


Рис. 3

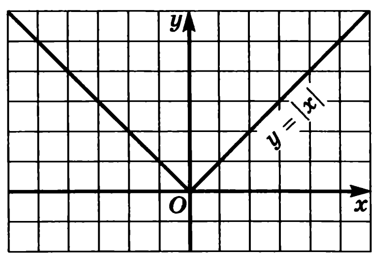


Рис. 4

Зная график функции $y = f(x)$, можно с помощью геометрических преобразований построить некоторые другие графики. Например, график функции $y = f(x + a) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на вектор $(-a; b)$, т. е. на $|a|$ вправо, если $a < 0$, и влево, если $a > 0$, на $|b|$ вверх, если

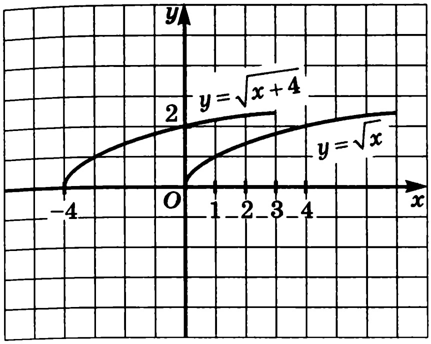


Рис. 5

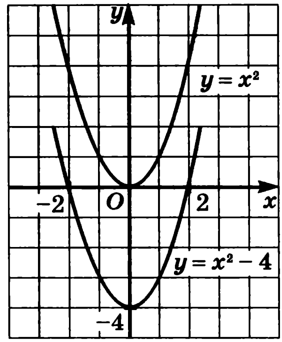


Рис. 6

$b > 0$, и вниз, если $b < 0$. Например, на рисунке 5 изображены графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x + 4}$, а на рисунке 6 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 4$.

Иногда говорят так: чтобы, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a) + b$, нужно перейти к новой системе координат, выбрав началом новой системы точку $(-a; b)$, и к новой системе «привязать» график функции $y = f(x)$. Например, на рисунке 7 изображен график функции $y = |x - 2| + 3$. Началом новой системы координат выбрана точка (2; 3), и к новой системе «привязан» график функции $y = |x|$.

Нетрудно, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = -f(x)$. Для этого достаточно осуществить симметрию графика функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс. Например, на рисунке 8 изображены графики функций $y = 2x + 6$ и $y = -(2x + 6)$.

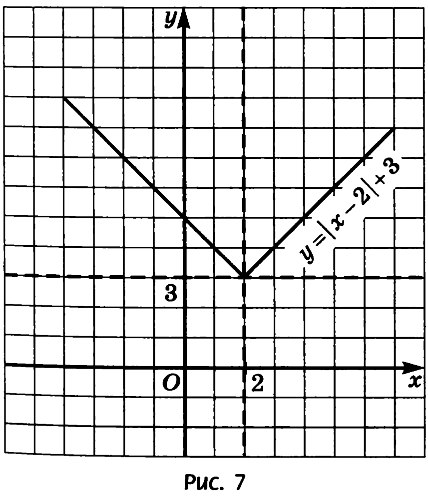


Рис. 7

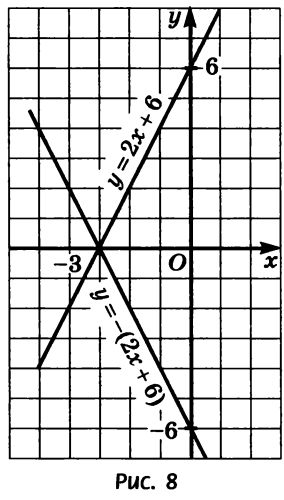


Рис. 8

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x} + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

а) Вычислить $f(-2)$, $f(0)$, $f(1{,}25)$, $f(6)$, $f(-3)$.
б) Найти $D(f)$ и $E(f)$.

Решение.

а) Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(-2)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(-2) = -(-2)^2 = -4$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(0)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(0) = -0^2 = 0$.

Значение $x = 1{,}25$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 3$, следовательно, $f(1{,}25)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(1{,}25) = \sqrt{1{,}25 + 1} = 1{,}5$.

Значение $x = 6$ удовлетворяет условию $x > 3$, следовательно, $f(6)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \dfrac{3}{x} + 1$; $f(6) = \dfrac{3}{6} + 1 = 1{,}5$.

Значение $x = -3$ не принадлежит области определения функции, а потому требование вычислить $f(-3)$ в данном случае некорректно.

б) В этом примере речь идет о так называемой *кусочной функции* (или о кусочно-заданной функции). Область определения функции состоит из трех промежутков: $[-2; 0]$, $(0; 3]$, $(3; +\infty)$. Объединив их, получим луч $[-2; +\infty)$.

Чтобы найти область (впрочем, можно говорить и множество) значений функции, построим ее график. Он состоит из трех «кусочков» — части параболы $y = -x^2$, взятой на отрезке $[-2; 0]$ (рис. 9), части кривой $y = \sqrt{x+1}$, взятой на полуинтервале $(0; 3]$ (рис. 10), и части гиперболы $y = \dfrac{3}{x} + 1$, взятой на открытом луче $(3; +\infty)$ (рис. 11); заметим, что $y = 1$ — асимптота гиперболы. Объединив эти кусочки на одном чертеже, получим график функции $y = f(x)$ (рис. 12). Спроецировав этот график на ось y, получим область значений функции, которая состоит из отрезка $[-4; 0]$ и полуинтервала $(1; 2]$.

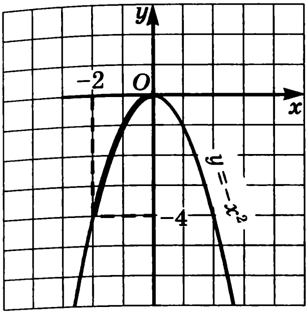


Рис. 9

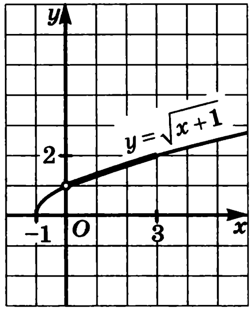


Рис. 10

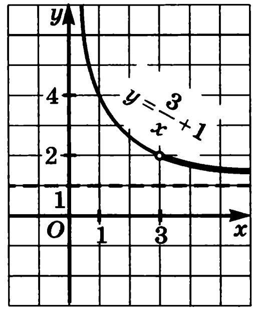


Рис. 11

Итак,

$$D(f) = [-2; +\infty),$$

$$E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2].$$

Еще раз подчеркнем, что задать функцию — это значит указать п р а в и л о, которое позволяет по произвольно выбранному значению $x \in D(f)$ вычислить соответствующее значение y. Чаще всего это правило связано с формулой (например, $y = \sqrt{x}$) или с несколькими формулами, как было в примере 1. Такой способ задания функции обычно называют *аналитическим*. Есть и другие способы задания функции.

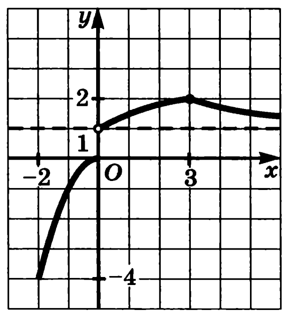


Рис. 12

Пусть F — некоторая линия на координатной плоскости и пусть, спроецировав эту линию на ось x, мы получим отрезок $[a; b]$ (рис. 13). Возьмем произвольную точку x из отрезка $[a; b]$ и проведем через нее прямую, параллельную оси ординат. Потребуем дополнительно, чтобы каждая такая прямая пересекала линию F только в одной точке — на рисунке 13 соответствующая точка обозначена буквой M. Ордината точки M — это число $f(x)$, соответствующее выбранному значению x. Тем самым на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Такой способ задания функции называют *графическим*.

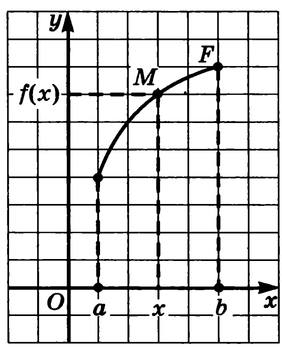


Рис. 13

Если функция была задана аналитически и нам удалось построить ее график, то тем самым мы фактически осуществили переход от аналитического способа задания функции к графическому. Обратный же переход удается осуществить далеко не всегда. Как правило, это довольно трудная задача.

Кроме аналитического и графического, на практике применяют *табличный* способ задания функции — с помощью таблицы, в которой указаны значения функции (иногда точные, иногда приближенные) для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции могут служить таблицы квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней и т. д.

Во многих случаях табличное задание функции является удобным. Оно позволяет найти значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента без всяких вычислений.

Аналитический, графический, табличный — наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно. На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции, но мы познакомим вас еще только с одним способом, который используется в весьма своеобразных ситуациях. Речь идет о *словесном* способе, когда правило задания функции описывается словами. Приведем пример.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех неотрицательных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие первая цифра после запятой в десятичной записи числа x. Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 5$ (первый знак после запятой — цифра 5); если $x = 13{,}002$, то $f(x) = 0$; если $x = \frac{2}{3}$, то, записав $\frac{2}{3}$ в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0{,}6666...$, находим: $f(x) = 6$.

А чему равно значение $f(15)$? Оно равно 0, так как $15 = 15{,}000...$, и мы видим, что первая цифра после запятой есть 0 (вообще-то верно и равенство $15 = 14{,}99...$, но обычно не рассматривают бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Любое неотрицательное число x можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной), а потому каждому значению x можно поставить в соответствие значение первой цифры после запятой, так что мы можем говорить о функции, хотя и несколько необычной. У этой функции

$$D(f) = [0; +\infty),\ E(f) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

§ 2. Свойства функций

В этом параграфе мы вспомним и сформулируем все свойства функций, изученные вами в 7—9-м классах, напомним их геометрический смысл и договоримся, в каком порядке следует перечислять эти свойства при чтении графика функции. Обратите внимание, что во всех определениях фигурирует числовое множество X — подмножество области определения функции: $X \subset D(f)$. На практике чаще всего X — числовой промежуток (отрезок, интервал, луч и т. д.).

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На практике удобнее пользоваться следующими формулировками: функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют *исследованием функции на монотонность*.

Если функция возрастает (или убывает) на своей естественной области определения, то говорят, что функция возрастающая (или убывающая) — без указания числового множества X.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию:
а) $y = 5 - 2x$; б) $y = x^3 + 2$.

Решение. а) Введем обозначение: $f(x) = 5 - 2x$. Если $x_1 < x_2$, то, по свойствам числовых неравенств, $-2x_1 > -2x_2$, и, далее, $5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает на всей числовой прямой.

б) Введем обозначение: $f(x) = x^3 + 2$. Возьмем произвольные значения аргумента x_1 и x_2, пусть $x_1 < x_2$. Тогда, по свойствам числовых неравенств, получим:

$$x_1^3 < x_2^3; \qquad x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что заданная функция возрастает на всей числовой прямой.

Определение 3. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу на множестве $X \subset D(f)$**, если все значения этой функции на множестве X *больше некоторого* числа; иными словами, если существует число m такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Определение 4. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху на множестве $X \subset D(f)$**, если все значения этой функции *меньше некоторого* числа; иными словами, если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции снизу или сверху на всей области ее определения.

Если функция ограничена и снизу и сверху на всей области определения, то ее называют **ограниченной.**

Ограниченность функции легко читается по ее графику: если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y = m$ (рис. 14); если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y = M$ (рис. 15).

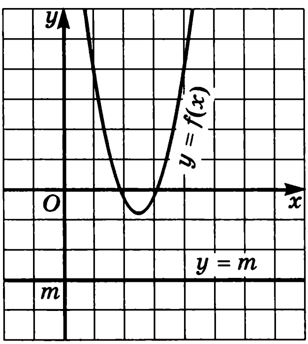


Рис. 14

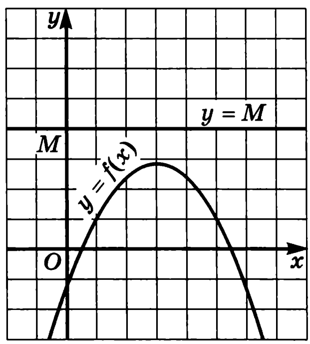


Рис. 15

Пример 2. Исследовать на ограниченность функцию

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Решение. С одной стороны, вполне очевидно неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0,$$

это означает, что функция ограничена снизу.

С другой стороны, $9 - x^2 \leqslant 9$, а потому

$$\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3.$$

Это означает, что функция ограничена сверху. Итак, функция ограничена и сверху, и снизу; можно сказать короче: ограниченная функция.

Определение 5. Число m называют **наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = m$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 6. Число M называют **наибольшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Наименьшее значение функции обозначают символом $y_{\text{наим}}$, а наибольшее — символом $y_{\text{наиб}}$. Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет о поиске наименьшего или наибольшего значения функции на всей области определения.

Достаточно очевидны следующие полезные утверждения (в качестве легкого упражнения докажите эти утверждения).

1) *Если у функции существует $y_{\text{наим}}$, то она ограничена снизу.*

2) *Если у функции существует $y_{\text{наиб}}$, то она ограничена сверху.*

3) *Если функция не ограничена снизу, то у нее не существует $y_{\text{наим}}$.*

4) *Если функция не ограничена сверху, то у нее не существует $y_{\text{наиб}}$.*

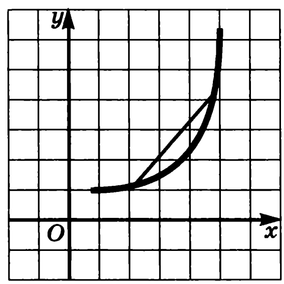


Рис. 16

Напомним еще два свойства функций. Первое — свойство выпуклости функции. Считается, что *функция выпукла вниз* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка (рис. 16). *Функция выпукла вверх* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика

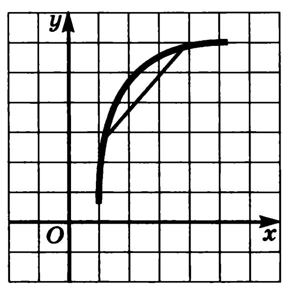


Рис. 17

с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка (рис. 17).

Второе свойство — *непрерывность функции на промежутке X* — означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва (т. е. представляет собой сплошную линию).

Замечание. На самом деле о непрерывности функции можно говорить только тогда, когда *доказано*, что функция является непрерывной. Но соответствующее определение сложное и нам пока не по силам (мы дадим его позднее, в § 26). То же самое можно сказать и о понятии выпуклости. Поэтому, обсуждая указанные два свойства функций, будем пока по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления.

Пример 3. Прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x} + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Решение. Прочитать график — это значит перечислить свойства функции. Всю информацию снимем с чертежа, представленного в § 1 на рисунке 12.

1) $D(f) = [-2; +\infty)$.

2) Функция возрастает на отрезке $[-2; 0]$ и на полуинтервале $(0; 3]$; функция убывает на луче $[3; +\infty)$.

3) Функция ограничена и снизу, и сверху.

4) $y_{\text{наим}} = -4$ (достигается в точке $x = -2$), $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается в точке $x = 3$).

5) Функция непрерывна на отрезке $[-2; 0]$ и на открытом луче $(0; +\infty)$. В точке $x = 0$ функция претерпевает разрыв.

6) $E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2]$.

Определение 7. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение 8. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Пример 4. Доказать, что $y = x^4$ — четная функция.

Р е ш е н и е. Здесь $f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является четной. ◀■

Аналогично можно доказать, что функции $y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^8$ являются четными.

Пример 5. Доказать, что $y = x^3$ — нечетная функция.

Р е ш е н и е. Здесь $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция является нечетной. ◀■

Аналогично можно доказать, что функции $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ являются нечетными.

Итак, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные функции. И вообще для любой функции вида $y = x^n$, где n — натуральное число, можно сделать вывод: если n — нечетное число, то функция $y = x^n$ нечетная; если n — четное число, то функция $y = x^n$ четная.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Такова, например, функция $y = 2x + 3$. В самом деле, пусть $f(x) = 2x + 3$; тогда $f(1) = 5$, а $f(-1) = 1$, т. е. $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Значит, не выполняется ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$.

Итак, функция может быть четной, нечетной, а также ни той ни другой.

Изучение вопроса, является ли заданная функция четной или нечетной, называют *исследованием функции на четность*.

В определениях 7 и 8 речь идет о значениях функции в точках x и $-x$. Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x, и в точке $-x$. Это значит, что точки x и $-x$ одновременно принадлежат области определения функции. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то такое множество называют *симметричным множеством*.

Скажем, $(-2; 2)$, $[-5; 5]$, $(-\infty; +\infty)$ — симметричные множества, в то время как $[0; +\infty)$, $(-2; 3)$, $[-5; 4]$ — несимметричные множества.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X — симметричное множество. Если же X — несимметричное множество, то функция $y = f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной, ни нечетной.

Учитывая сказанное выше, рекомендуем при исследовании функции на четность использовать следующий алгоритм.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$, $x \in X$ на четность

1. Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
2. Составить выражение $f(-x)$.
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если имеет место тождество $f(-x) = f(x)$, то функция четная;
   б) если имеет место тождество $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная;
   в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 6. Исследовать на четность функцию:

а) $y = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$; в) $y = \dfrac{x - 4}{x^2 - 9}$;

б) $y = x^5 - \dfrac{3}{x^3}$; г) $y = \sqrt{x - 3}$.

Решение. а) $y = f(x)$, где $f(x) = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^4 + \dfrac{2}{(-x)^6} = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$ — четная функция.

б) $y = f(x)$, где $f(x) = x^5 - \dfrac{3}{x^3}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^5 - \dfrac{3}{(-x)^3} = -x^5 - \dfrac{3}{-x^3} = -\left(x^5 - \dfrac{3}{x^3}\right)$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^5 - \dfrac{3}{x^3}$ — нечетная функция.

в) $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 9}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 3 и -3. Значит, область определения функции — числовая прямая, из которой удалены две точки: 3 и -3. Это симметричное множество.

2) $f(-x) = \dfrac{(-x) - 4}{(-x)^2 - 9} = -\dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$.

3) Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$. Чтобы в этом убедиться, возьмем конкретное значение x, например $x = 4$; имеем: $f(4) = 0$, а $f(-4) = -\dfrac{8}{7}$, т. е. $f(-4) \neq f(4)$ и $f(-4) \neq -f(4)$.

Таким образом, функция не является ни четной, ни нечетной.

г) Функция $y = \sqrt{x - 3}$ определена на луче $[3; +\infty)$. Этот луч — несимметричное множество, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 7. Исследовать на четность функцию:

а) $y = |x|$, $x \in [-2; 2]$;

б) $y = |x|$, $x \in [-3; 3)$;

в) $y = x^3$, $x \in (-5; 5)$;

г) $y = x^3$, $x \in (-5; 5]$.

Решение. а) $D(f) = [-2; 2]$ — симметричное множество, и для любого значения x выполняется равенство $|-x| = |x|$. Значит, заданная функция — четная.

б) $D(f) = [-3; 3)$ — несимметричное множество. В самом деле, точка -3 принадлежит полуинтервалу $[-3; 3)$, а противоположная точка 3 не принадлежит этому полуинтервалу. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

в) $D(f) = (-5; 5)$ — симметричное множество, и $(-x)^3 = -x^3$ для любого значения x из области определения функции. Значит, заданная функция — нечетная.

г) Функция задана на полуинтервале, который не является симметричным множеством. Значит, функция ни четная, ни нечетная.

Теперь напомним геометрический смысл свойства четности и свойства нечетности функции.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x; f(x))$ и $B(-x; f(-x))$. Так как $f(-x) = f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами, а ординаты одинаковы,

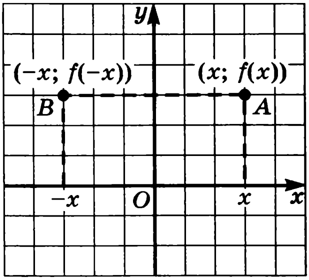


Рис. 18

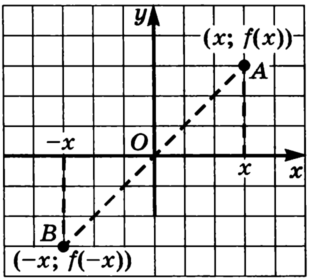


Рис. 19

т. е. эти точки симметричны относительно оси y (рис. 18). Таким образом, для каждой точки A графика четной функции существует симметричная ей относительно оси y точка B того же графика. Это означает, что ***график четной функции симметричен относительно оси y.***

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x;\ f(x))$ и $B(-x;\ f(-x))$. Так как $f(-x) = -f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами и ординаты являются противоположными числами, т. е. эти точки симметричны относительно начала координат (рис. 19). Таким образом, для каждой точки A графика нечетной функции существует симметричная ей относительно начала координат точка B того же графика. Это означает, что ***график нечетной функции симметричен относительно начала координат.***

Верны и обратные утверждения.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно оси ординат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция.

В самом деле, симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси y означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — четная функция.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция.

Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно начала координат означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция.

§ 3. Обратная функция

Сравним функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рисунках 20 и 21. Обе они определены на отрезке $[a;\ b]$ и имеют множеством своих значений отрезок $[c;\ d]$. Функция $y = f(x)$

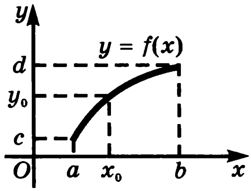


Рис. 20

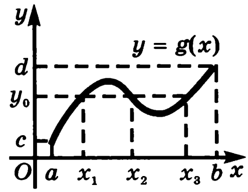


Рис. 21

обладает следующим свойством: какое бы число y_0 из множества значений функции ни взять, оно является значением функции только в одной точке x_0: $y_0 = f(x_0)$. Функция $y = g(x)$ этим свойством не обладает; например, для выбранного на рисунке 21 значения y_0 имеем: $y_0 = g(x_1)$, $y_0 = g(x_2)$ и $y_0 = g(x_3)$. Иными словами, среди множества значений функции $y = g(x)$ есть такие, которые функция принимает более чем в одной точке области определения. Говорят, что функция $y = f(x)$ *обратима*, а функция $y = g(x)$ — *необратима*. Дадим точное определение.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Теорема 1. **Если функция $y = f(x)$ $x \in X$ монотонна на множестве X, то она обратима.**

Доказательство. Пусть для определенности функция $y = f(x)$ возрастает на X и $x_1 \neq x_2$ — две точки из X; пусть, например, $x_1 < x_2$. Поскольку функция возрастает, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т. е. функция обратима. ●

Наглядную иллюстрацию этой теоремы дают рисунки 20 и 21; функция $y = f(x)$ монотонна и обратима, тогда как функция $y = g(x)$ немонотонна и необратима.

Определение 2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — обратимая функция и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т. е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая определена на Y, а X — ее область значений. Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ и называют **обратной** по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Из теоремы 1 следует, что для любой монотонной на X функции $y = f(x)$ существует обратная функция. Чтобы ее найти, надо из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, а Y — область значений функции, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на Y.**

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ — возрастающая функция, y_1 и y_2 — два ее значения, причем $y_1 < y_2$. Так как функция обратима, то каждое из этих значений достигается в одной точке: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Значения x_1 и x_2 связаны неравенством $x_1 < x_2$. В самом деле, если предположить, что $x_1 \geqslant x_2$, то из возрастания функции $y = f(x)$ следовало бы $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т. е. $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит условию. Значит, из $y_1 < y_2$ следует $x_1 < x_2$, т. е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, а это означает, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y. ●

Пример 1. Показать, что для функции $y = 5x - 3$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Линейная функция $y = 5x - 3$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, возрастает на $\boldsymbol{R}$, область ее значений есть $\boldsymbol{R}$. Значит, обратная функция существует на $\boldsymbol{R}$. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение $y = 5x - 3$ относительно x; получим: $x = \frac{y+3}{5}$. Это и есть искомая обратная функция. Она определена и возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Пример 2. Показать, что для функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ убывает, и область ее значений — луч $[0; +\infty)$ (рис. 22). Значит, обратная функция существует на $[0; +\infty)$.

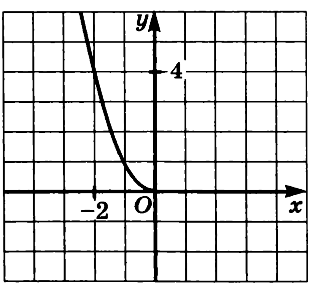


Рис. 22

Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. По условию, $x \in (-\infty; 0]$. Этому промежутку принадлежат значения функции $x = -\sqrt{y}$ и не принадлежат значения функции $x = \sqrt{y}$. Таким образом, искомая обратная функция такова: $x = -\sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$. Эта функция, как и исходная функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, является убывающей.

Замечание. Монотонность функции, как мы видели, является достаточным условием существования обратной функции (т. е. из монотонности следует обратимость). Но монотонность не является необходимым условием (т. е. из обратимости необязательно должна следовать монотонность). Так, на рисунке 23 изображен график немонотонной, но обратимой функции.

Переход от функции $y = f(x)$, $x \in X$ к обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ сводится лишь к изменению ролей множеств X и Y: в первом случае осуществляется переход от X к Y, во втором — от Y к X, тогда как зависимость между X и Y одна и та же в обоих случаях. Поэтому *графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.*

Но на практике аргумент обратной функции обозначают более привычной буквой x, а значение функции — буквой y, т. е. вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$. Но если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $y = f(x)$ или эквивалентному уравнению $x = f^{-1}(y)$, то уравнению $y = f^{-1}(x)$ удовлетворяет пара чисел $(y; x)$. Поэтому график функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xOy, переводящего точку $(x; y)$ в точку $(y; x)$. Этим преобразованием, как мы сейчас докажем, является симметрия относительно прямой $y = x$ (биссектрисы I и III координатных углов).

Теорема. **Точки $M(a; b)$ и $P(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.**

Доказательство. Будем считать для определенности, что a и b — положительные числа. Рассмотрим треугольники OAM и OBP (рис. 24). Они равны, значит, $OP = OM$ и $\angle MOA = \angle BOP$. Но тогда и $\angle POH = \angle HOM$, поскольку прямая $y = x$ — биссектриса

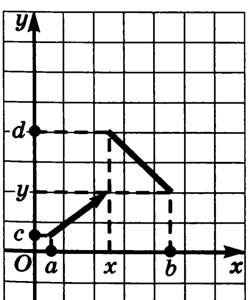


Рис. 23

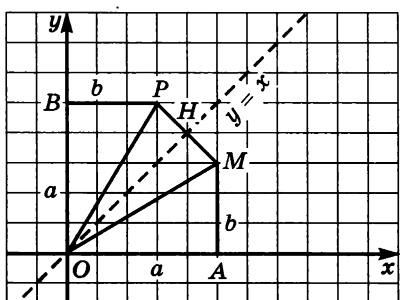


Рис. 24

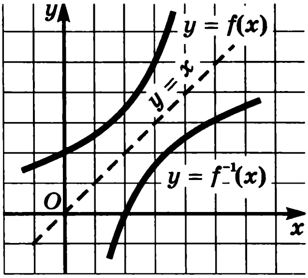


Рис. 25

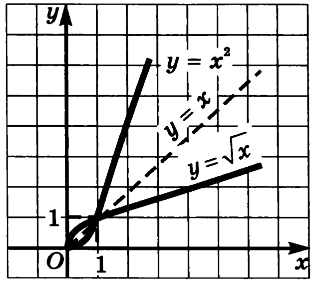


Рис. 26

угла AOB. Итак, треугольник POM равнобедренный, OH — его биссектриса, а значит, и ось симметрии. Точки M и P симметричны относительно прямой OH, что и требовалось доказать. ●

Значит, *чтобы получить график функции* $y = f^{-1}(x)$, *обратной по отношению к функции* $y = f(x)$, *надо график функции* $y = f(x)$ *преобразовать симметрично относительно прямой* $y = x$ (рис. 25).

Пример 3. Дана функция $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Доказать, что для нее существует обратная функция, записать аналитическое выражение обратной функции в виде $y = f^{-1}(x)$ и построить график обратной функции.

Р е ш е н и е. Заданная функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. Промежутку $[0; +\infty)$ принадлежат лишь значения функции $x = \sqrt{y}$. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке $[0; +\infty)$.

Поменяв местами x и y, получим: $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$. График этой функции получается из графика функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 26). ◁■

ГЛАВА 2 Тригонометрические функции

§ 4. Числовая окружность

В курсе алгебры 7—9-го классов вы изучали алгебраические функции, т. е. функции, заданные аналитическими выражениями, в записи которых использовались алгебраические операции над числами и переменной (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного и кубического корней). Но математические модели реальных ситуаций часто бывают связаны с функциями других классов — не алгебраическими. В школьном курсе математики рассматриваются показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Мы приступаем сейчас к изучению тригонометрических функций.

Для введения тригонометрических функций нам понадобится новая математическая модель — *числовая окружность*.

С числовой окружностью вы до сих пор не встречались, зато хорошо знакомы с числовой прямой. Что такое числовая прямая? Это прямая, на которой заданы начальная точка O, масштаб (единичный отрезок) и положительное направление. Любому действительному числу мы можем сопоставить единственную точку на прямой, и обратно: любая точка прямой соответствует единственному числу.

Как по числу x найти на прямой соответствующую точку M? Числу 0 соответствует начальная точка O. Если $x > 0$, то, двигаясь по прямой из точки O в положительном направлении, нужно пройти путь длиной x. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Если $x < 0$, то, двигаясь по прямой из точки O в отрицательном направлении, нужно пройти путь длиной $|x|$. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Число x — координата точки M.

А как решается обратная задача, как найти координату x заданной точки M на числовой прямой? Надо найти длину отрезка OM и взять ее со знаком + или − в зависимости от того, с какой стороны от точки O расположена на прямой точка M.

Но в реальной жизни приходится двигаться не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности. Вот конкретный пример. Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью (на самом деле это, конечно, не окружность

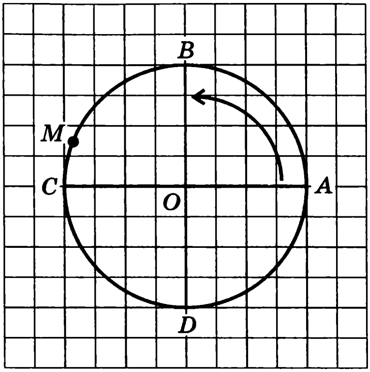


Рис. 27

и тем более не круг, но вспомните, как обычно говорят спортивные комментаторы: «бегун пробежал круг», «до финиша осталось пробежать полкруга» и т. д.), и пусть ее длина равна 400 м. Отмечаем старт — точку A (рис. 27). Бегун из точки A движется по окружности против часовой стрелки. Где он будет через 200 м? через 400 м? через 800 м? через 1500 м? А где провести финишную черту, если он бежит марафонскую дистанцию 42 км 195 м?

Через 200 м он будет находиться в точке C, диаметрально противоположной точке A (200 м — это длина половины беговой дорожки, т. е. длина половины окружности). Пробежав 400 м («один круг»), он вернется в точку A. Пробежав 800 м («два круга»), он вновь окажется в точке A. А что такое 1500 м? Это «три круга» (1200 м) плюс еще 300 м, т. е. $\frac{3}{4}$ беговой дорожки, финиш этой дистанции будет в точке D.

Нам осталось разобраться с марафоном. Пробежав 105 кругов, спортсмен преодолеет путь $105 \cdot 400 = 42\,000$ м, т. е. 42 км. До финиша остается 195 м, это на 5 м меньше половины длины окружности. Значит, финиш марафонской дистанции будет в точке M, расположенной около точки C (см. рис. 27).

Замечание 1. Вы, разумеется, понимаете условность последнего примера. Марафонскую дистанцию по кругу стадиона никто не бегает, максимальная дистанция для стайеров (бегунов на длинные дистанции) на стадионе составляет 10 000 м, т. е. 25 кругов.

По беговой дорожке стадиона можно пробежать или пройти путь любой длины. Значит, любому положительному числу соответствует какая-то точка — «финиш дистанции». Более того, и любому отрицательному числу можно поставить в соответствие точку беговой дорожки стадиона, просто спортсмен должен бежать в противоположном направлении (т. е. стартовать из A не в направлении против, а в направлении по часовой стрелке). Тогда беговую дорожку стадиона можно рассматривать как *числовую окружность*.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать для этой цели единичную окружность — окружность, радиус которой принимается за единицу измерения. Это будет наша «беговая дорожка», ее длина l равна 2π ($l = 2\pi R$; здесь $R = 1$), что составляет примерно 6,28.

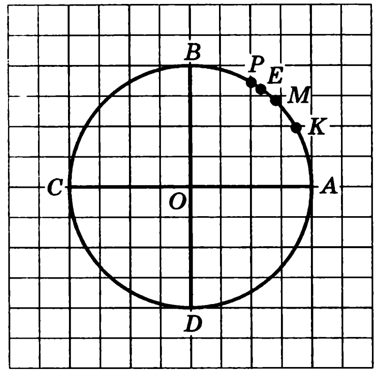


Рис. 28

Мы все время будем пользоваться единичной окружностью, в которой проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB (рис. 28) *первой четвертью*, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвертой четвертью*. При этом, как правило, речь будет идти об *открытых дугах*, т. е. о дугах без их концов: например, первая четверть — это дуга AB без точек A и B. Длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{1}{4} \cdot 2\pi$, т. е. $\frac{\pi}{2}$.

Сколько существует дуг единичной окружности, соединяющих точки A и B? Две: поменьше, если идти от точки A к точке B по первой четверти, и побольше, если идти от точки B к точке A по второй, третьей и четвертой четвертям. Как отличить эти дуги друг от друга, используя символы математического языка? Условимся в двухбуквенном обозначении дуги на первом месте писать букву, соответствующую началу дуги, а на втором — букву, соответствующую концу дуги, причем движение по окружности от начала дуги к ее концу будем осуществлять в направлении *против часовой стрелки*. Тогда меньшая из двух дуг, соединяющих точки A и B, о которых мы говорили выше, — это дуга AB, а бо́льшая — это дуга BA.

Пример 1. В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а точками K и P — на три равные части (рис. 28). Чему равна длина дуги: AM, MB, AK, KP, PB, AP, KM?

Решение. Так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ (будем писать кратко: $AB = \frac{\pi}{2}$), то, разделив ее на две равные части точкой M, получим две дуги, длиной $\frac{\pi}{4}$ каждая. Значит, $AM = MB = \frac{\pi}{4}$.

Если дуга AB разбита на три равные части точками K и P, то длина каждой полученной части равна $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AK = KP = PB = \frac{\pi}{6}$.

Дуга AP состоит из двух дуг AK и KP длиной $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AP = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Осталось вычислить длину дуги KM. Эта дуга получается из дуги AM исключением дуги AK. Значит, длина дуги KM равна разности длин дуг AM и AK. Таким образом,

$$KM = AM - AK = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Замечание 2. Обратите внимание на некоторую вольность, которую мы позволяем себе в использовании математического языка. Ясно, что *дуга* KM и *длина дуги* KM — разные вещи (первое понятие — геометрическая фигура, а второе понятие — число). А обозначается и то и другое одинаково: KM. Более того, если точки K и M соединить отрезком, то и полученный отрезок, и его длина обозначаются так же: KM. Обычно из контекста бывает ясно, какой смысл вкладывается в обозначение (дуга, длина дуги, отрезок или длина отрезка).

Пример 2. Вторая четверть единичной окружности разделена пополам точкой M (рис. 29), а четвертая четверть разделена на три равные части точками K и P. Чему равна длина дуги: AM, AK, AP, PB, MK, KM?

Решение. Прежде чем переходить к требуемым вычислениям, заметим, что $AB = BC = CD = DA = \frac{\pi}{2}$, $BM = MC = \frac{\pi}{4}$,

$$DK = KP = PA = \frac{\pi}{6}.$$

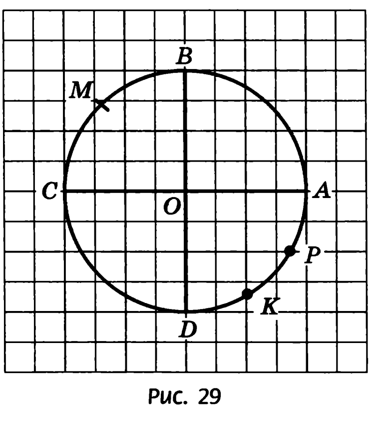


Рис. 29

Значит,

$$AM = AB + BM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$AK = AB + BC + CD + DK =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3};$$

$$AP = AD + DP = \frac{3\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6};$$

$$PB = PA + AB = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3};$$

$$MK = MC + CD + DK = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12};$$

$$KM = KP + PA + AB + BM = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}.$$

Заметили ли вы, что во всех разобранных примерах длины дуг выражались некоторыми долями числа π? Это неудивительно: ведь длина единичной окружности равна 2π, и если мы окружность или ее четверть делим на равные части, то получаются дуги, длина каждой из которых выражается долями числа π. А как вы думаете, можно ли найти на единичной окружности такую точку E, что длина дуги AE будет равна 1? Давайте прикинем:

$$\pi \approx 3{,}14; \ \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047; \ \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785.$$

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$. Обратимся снова к рисунку 28. Если $AE = 1$, то точка E находится между точками M и P, ближе к точке P. Разумеется, точно (а не приблизительно) указать положение точки E на окружности мы не сумеем, но это, впрочем, не так уж важно.

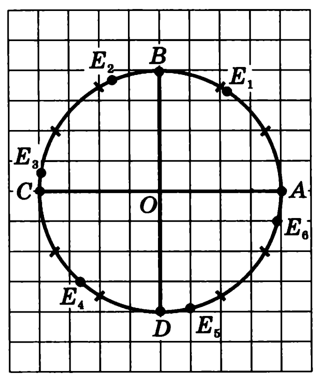


Рис. 30

На единичной окружности можно найти и точку E_1, для которой $AE_1 = 1$, и точку E_2, для которой $AE_2 = 2$, и точку E_3, для которой $AE_3 = 3$, и точку E_4, для которой $AE_4 = 4$, и точку E_5, для которой $AE_5 = 5$, и точку E_6, для которой $AE_6 = 6$. На рисунке 30 отмечены (приблизительно) соответствующие точки, причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена (черточками) на три равные части. Заметим, что $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$ — правильный шестиугольник, вписанный в окружность.

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

3) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью.**

Пример 3. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как первые шесть из заданных семи чисел положительны, то для нахождения соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки A в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{2}$.

Имеем (см. рис. 31): $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, числу $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка B; $B = B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Далее, $AC = \pi$, значит, числу π соответствует точка C, т. е. $C = C(\pi)$.

$AD = \frac{3\pi}{2}$, значит, числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D, т. е. $D = D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Числу 2π соответствует точка A, так как, пройдя по окружности путь длиной 2π, т. е. ровно одну окружность, мы снова попадем в начальную точку A. Итак, $A = A(2\pi)$.

Что такое $\frac{7\pi}{2}$? Это $2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно пройти целую окружность (путь длиной 2π) и дополнительно путь длиной $\frac{3\pi}{2}$, который закончится в точке D. Итак, $D = D\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

Что такое 9π? Это $4 \cdot 2\pi + \pi$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно четыре раза пройти целую окружность (путь длиной $4 \cdot 2\pi$) и дополнительно еще путь длиной π, который закончится в точке C. Итак, $C = C(9\pi)$.

Осталось найти на числовой окружности точку, соответствующую заданному отрицательному числу $-\frac{3\pi}{2}$. Для этого нужно из точки A пройти по окружности в отрицательном направлении (по часовой стрелке) путь длиной $\frac{3\pi}{2}$. Этот путь завершится в точке B, т. е. $B = B\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$. ◀

Замечание 3. При работе с числовой прямой обычно условливаются для краткости не говорить «точка прямой, соответствующая числу x», а говорить «точка x». Точно такой же договоренности будем придерживаться и при работе с числовой окружностью: «точка t» — это значит, что речь идет о точке окружности, которая соответствует числу t.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив первую четверть AB на три равные части точками K и P (рис. 31), получим: $K = K\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $P = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Разделив дугу AB пополам точкой M, получим: $M = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$. ◀

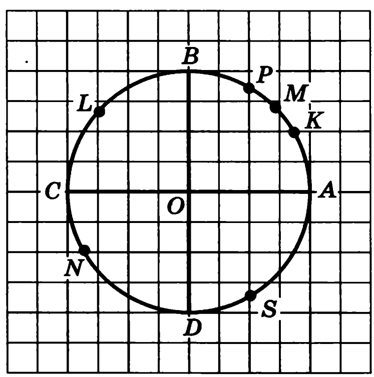


Рис. 31

Пример 5. Найти на числовой окружности точки $-\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$.

Решение. Построения будем проводить, используя рисунок 31. Отложив дугу AM (ее длина равна $\frac{\pi}{4}$)

от точки A в отрицательном направлении пять раз, получим точку L — середину дуги BC. Итак, $L = L\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A в положительном направлении семь раз, попадем в точку N, которая принадлежит третьей четверти — дуге CD, причем $CN = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги CD). Итак, $N = N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A в положительном направлении десять раз, попадем в точку S, которая принадлежит четвертой четверти — дуге DA, причем $DS = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги DA). Итак, $S = S\left(\frac{10\pi}{6}\right) = S\left(\frac{5\pi}{3}\right)$. ◀■

Особенно часто приходится искать на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и кратным им, т. е. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{2}$ и т. д. Поэтому нам очень пригодятся два макета числовой окружности.

ПЕРВЫЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на две равные части, и около каждой из имеющихся восьми точек записано ее «имя» (рис. 32).

ВТОРОЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на три равные части, и около каждой из имеющихся двенадцати точек записано ее «имя» (рис. 33).

Учтите, что на обоих макетах мы могли бы заданным точкам присвоить другие «имена»*. Так, числу $-\frac{\pi}{4}$ соответствует середина четвертой четверти. Этой точке на первом макете присвоено имя $\frac{7\pi}{4}$, но, как видите, мы могли присвоить ей и имя $-\frac{\pi}{4}$. Вообще, если двигаться по первому макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже восьми точек соответственно 0,

---

* Далее условный термин «имя» будем использовать без кавычек.

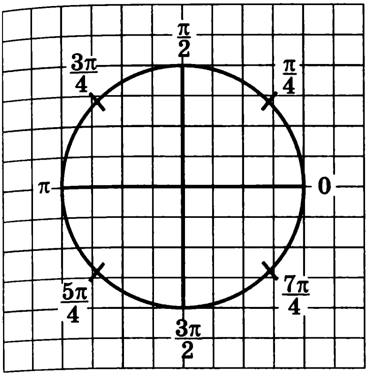


Рис. 32

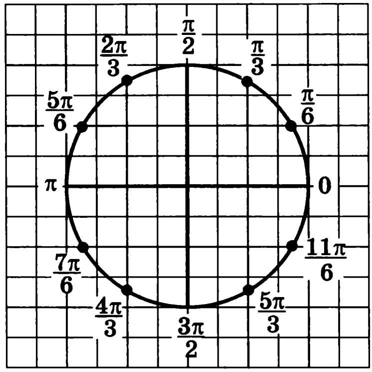


Рис. 33

$-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\pi$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$. Аналогично, если двигаться по второму макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже двенадцати точек соответственно 0, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$, ..., $-\frac{11\pi}{6}$.

Пример 6. Найти на числовой окружности точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, −7.

Решение. Точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, — это точки E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 на рисунке 30. О точке −7 поговорим подробнее.

Нам нужно, двигаясь из точки A в отрицательном направлении (по часовой стрелке), пройти по окружности путь длиной 7. Если пройти одну окружность, то получим (приближенно) 6,28, значит, нужно еще пройти (в том же направлении) путь длиной 0,72. Что же это за дуга, длина которой равна 0,72? Она немного меньше половины четверти окружности: ее длина меньше числа $\frac{\pi}{4}$, потому что $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, а $0{,}72 < 0{,}785$. Точка $M = M(-7)$ отмечена на рисунке 34 (мы немного не дошли до середины четвертой четверти). ◁■

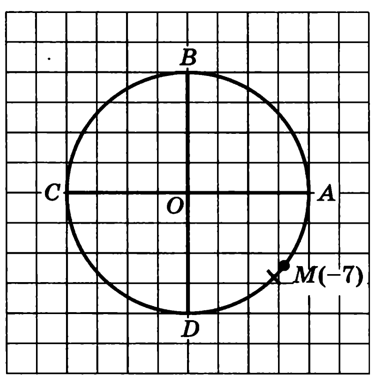


Рис. 34

Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой, каждому действительному числу соответствует одна точка (только, разумеется, на прямой ее найти легче, чем на окружности). Для числовой прямой верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно: выше мы неоднократно убеждались в этом.

Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и числу вида $t + 2\pi k$, где k — любое целое число ($k \in Z$).

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число $|k|$ можно рассматривать как количество полных обходов окружности в ту или иную сторону. Например, если $k = 3$, то это значит, что мы делаем три обхода окружности в положительном направлении; если $k = -7$, то это значит, что мы делаем семь ($|k| = |-7| = 7$) обходов окружности в отрицательном направлении. Но если мы находимся в точке $M(t)$, то, выполнив еще k полных обходов окружности, мы снова окажемся в точке M. Итак,

$$\boxed{M(t) = M(t + 2\pi k), \quad \text{где } k \in Z.}$$

На двух макетах (см. рис. 32, 33) указаны лишь главные имена точек — числа, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$, т. е. числа, соответствующие точкам числовой окружности при первом ее обходе в положительном направлении. На самом деле у точки $\frac{\pi}{4}$ бесконечно много имен: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$; у точки $\frac{5\pi}{6}$ тоже бесконечно много имен: $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$, и т. д.

Число k иногда называют *параметром*. Впрочем, параметр можно обозначить и другой буквой, например n или m.

Пример 7. Найти на числовой окружности точку:

а) $\frac{21\pi}{4}$; б) $-\frac{37\pi}{6}$.

Решение.

а) $\frac{21\pi}{4} = \frac{21}{4}\pi = \left(4 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 4\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 2.$

Значит, числу $\frac{21\pi}{4}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{4}$, — это середина третьей четверти (см. рис. 32).

б) $-\frac{37\pi}{6} = -\frac{37}{6}\pi = -\left(6 + \frac{1}{6}\right)\cdot\pi = -6\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot(-3)$.

Значит, числу $-\frac{37\pi}{6}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $-\frac{\pi}{6}$, — это точка с именем $-\frac{\pi}{6}$, или, что то же самое, $\frac{11\pi}{6}$ (см. рис. 33). ◼

Вы знаете, что промежутки на числовой прямой можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств. Так, аналитической записью отрезка [3; 5] (рис. 35) служит двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 5$; аналитической записью интервала $(-4; 0)$ (рис. 35) служит двойное неравенство $-4 < x < 0$. На окружности роль отрезков или интервалов играют дуги. Их тоже можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств, но при этом, естественно, следует учитывать, что, в отличие от числовой прямой, где каждая точка имеет одно числовое имя, на числовой окружности у точки бесконечно много имен. В следующем примере мы покажем, как составляется аналитическая запись дуги числовой окружности.

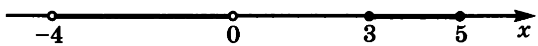


Рис. 35

Пример 8. Найти все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге:

а) AB; б) BA; в) DB; г) KM; д) MK

(здесь K и M — соответственно середина первой и третьей четверти числовой окружности).

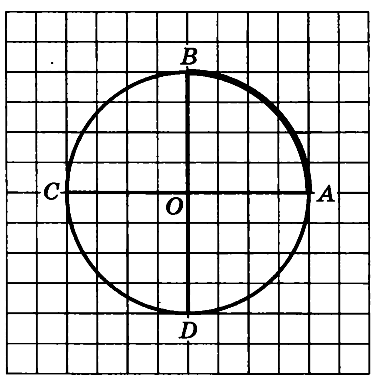


Рис. 36

Решение. а) Дуга AB — это дуга с началом в точке A и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 36). Главные имена точек A и B — соответственно $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Значит, для точек t дуги AB имеем:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Как мы видели ранее, точка A соответствует не только числу 0, но и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$; точка B соответствует не только числу $\frac{\pi}{2}$, но и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Значит, если мы хотим охарактеризовать все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки дуги AB, то придется использовать такую запись:

$$2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z. \qquad (2)$$

Для удобства на первых порах будем пользоваться следующей (не общепринятой) терминологией: неравенство (1) — *ядро аналитической записи дуги AB*, неравенство (2) — *аналитическая запись дуги AB*.

б) Для дуги BA (рис. 37) главные имена точек B и A — соответственно $\frac{\pi}{2}$ и 2π. Значит, ядром аналитической записи дуги BA является неравенство $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi$, а сама аналитическая запись дуги BA имеет вид

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi k.$$ [1]

в) Для дуги DB (рис. 38) главные имена точек D и B соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; при записи ядра нужно следить за тем, чтобы число в левой части неравенства было меньше числа в правой части (поэтому для точки D выбрано имя $-\frac{\pi}{2}$, а не $\frac{3\pi}{2}$). Значит, ядром аналитической записи дуги DB является неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

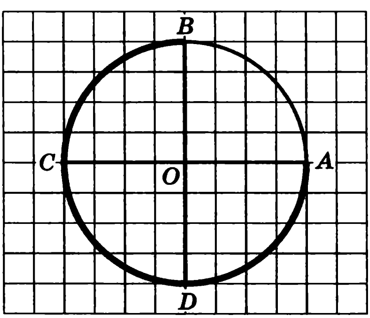


Рис. 37

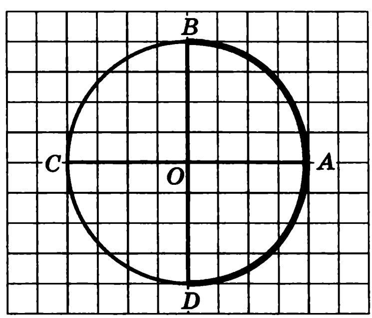


Рис. 38

[1] Условимся в дальнейшем не писать каждый раз $k \in Z$ или $n \in Z$ (но, естественно, мы все время будем это подразумевать).

а сама аналитическая запись дуги DB имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

г) Дуга KM — это дуга с началом в точке K и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 39). Главные имена точек K и M — соответственно $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KM является неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги KM имеет вид

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

д) Для дуги MK (рис. 40) главные имена точек M и K — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MK является неравенство

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги MK имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

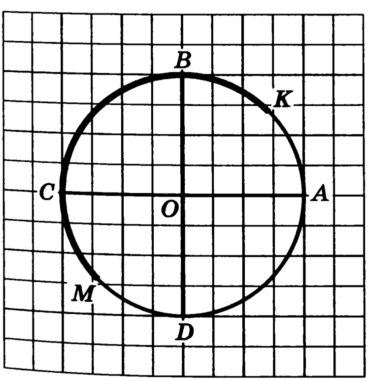


Рис. 39

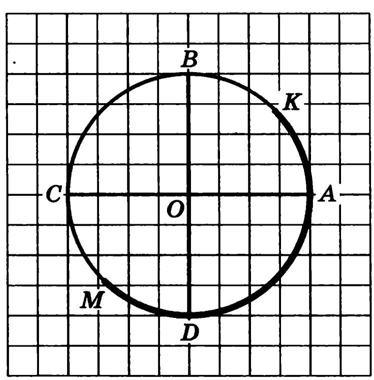


Рис. 40

§ 5. Числовая окружность на координатной плоскости

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат xOy так, как показано на рисунке 41: центр окружности совмещен с началом координат, а ее радиус принимается за единичный отрезок. Начальная точка A числовой окружности совмещена с точкой $(1; 0)$ на оси x. При этом $B = B(0; 1)$, $C = C(-1; 0)$, $D = D(0; -1)$. Каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем (см. рис. 41):

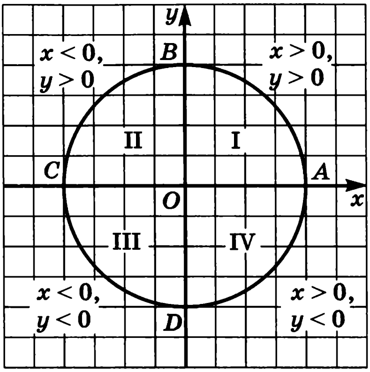


Рис. 41

$x > 0$, $y > 0$ в первой четверти;
$x < 0$, $y > 0$ во второй четверти;
$x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти;
$x > 0$, $y < 0$ в четвертой четверти.

Для любой точки $M(x; y)$ числовой окружности выполняются неравенства

$$-1 \leqslant x \leqslant 1; \ -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Нетрудно составить уравнение числовой окружности. Для этого заметим, что, во-первых, центром окружности служит начало координат, а уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$; во-вторых, $R = 1$, значит, уравнение числовой окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности, прежде всего тех, которые представлены на двух макетах (см. рис. 32, 33). Начнем с точек первого макета: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

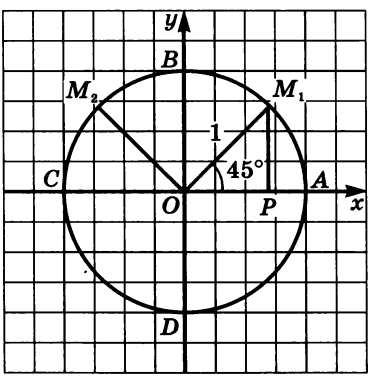


Рис. 42

Точка $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ — середина первой четверти. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим треугольник OM_1P (рис. 42). Так как дуга AM_1 составляет половину дуги AB, то

$\angle AOM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник; $OP = M_1P$, т. е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны: $x = y$. Кроме того, координаты точки $M_1(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, для нахождения координат точки M_1 нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение системы, получим: $x^2 + x^2 = 1$; $x^2 = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (мы учли, что абсцисса точки M_1 положительна). А так как $y = x$, то и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Проанализируем полученное равенство. Что означает запись $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Она означает, что точка M_1 числовой окружности соответствует числу $\frac{\pi}{4}$. А запись $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ означает, что точка M_1 имеет соответствующие координаты в прямоугольной системе координат xOy. И в дальнейшем будем придерживаться подобного способа записи: если написано $M(t)$, то это значит, что точка M числовой окружности соответствует числу t; если написано $M(x;\ y)$, то это значит, что числа x и y являются соответственно абсциссой и ординатой точки M. Таким образом, $(x;\ y)$ — декартовы координаты точки M, а t — «криволинейная» координата точки M на числовой окружности.

Рассмотрим точку $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ — середину второй четверти (рис. 42). Рассуждая, как и выше (для точки M_1), получим для модуля абсциссы и модуля ординаты этой точки те же значения $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$, что и для точки $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку во второй четверти $x < 0$, а $y > 0$, делаем вывод:

$$M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ — середины третьей четверти — имеем:

$$M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ — середины четвертой четверти — имеем:

$$M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right) = M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица 1

	Точка окружности								
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Теперь найдем координаты точек, изображенных на втором макете (см. рис. 33). Возьмем точку $M_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$, опустим из нее перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OM_1P (рис. 43). Гипотенузой этого треугольника является отрезок OM_1, причем $OM_1 = 1$. Угол M_1OP равен 30°, поскольку дуга AM_1 составляет треть дуги AB, а дуга AB содержит 90°. Из геометрии известно, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. Значит, $M_1P = \frac{1}{2}$ — это ордината точки M_1, т. е. $y = \frac{1}{2}$.

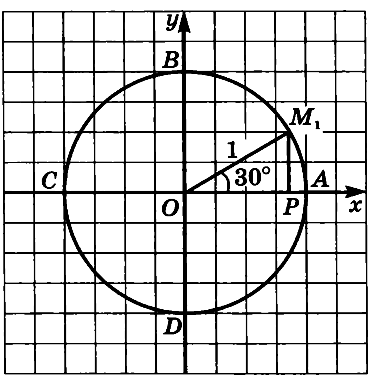


Рис. 43

По теореме Пифагора,

$$OP^2 = OM_1^2 - M_1P^2.$$

Значит,

$$x^2 = OP^2 = OM_1^2 - M_1P^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

т. е. $x^2 = \frac{3}{4}$, а потому $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (мы учли, что точка $\frac{\pi}{6}$ принадлежит первой четверти, обе ее координаты — положительные числа).

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

С точкой $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ связан такой же прямоугольный треугольник, как и с точкой M_1, только расположенный по-другому (рис. 44). Получаем:

$$M_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Те же самые значения (с точностью до знака) будут координатами остальных точек второго макета, исключая, разумеется, точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, причем по чертежу нетрудно определить, какая координата равна по модулю числу $\frac{1}{2}$, а какая — числу $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Возьмем для примера точку $M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (см. рис. 44). Опустим перпендикуляр M_3L на ось x. Во-первых, $M_3L < LO$, т. е. $|y| < |x|$. Значит, из двух чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в качестве модуля ординаты точки M_3 нужно взять меньшее, т. е. $\frac{1}{2}$, а в качестве модуля абсциссы — большее, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Во-вторых, $\frac{7\pi}{6}$ — точка третьей четверти, а потому $x < 0$ и $y < 0$.

В итоге получаем:

$$M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

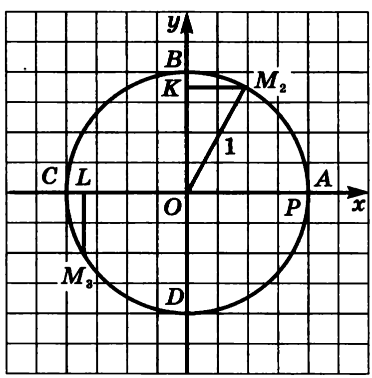


Рис. 44

А теперь возьмите точку $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ и попробуйте, проведя аналогичные рассуждения, найти ее координаты. Мы же пока приведем таблицу для точек второго макета, с помощью которой вы сможете проверить правильность своего вывода.

Таблица 2

	Точка окружности							
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Теперь проверьте себя по таблице 2: $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right) = M_4\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 1. Найти координаты точек числовой окружности:

а) $P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)$; б) $P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$; в) $P_3(45\pi)$; г) $P_4(-18\pi)$.

Решение. Во всех четырех случаях воспользуемся утверждением, полученным в § 4: числам t и $t + 2\pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$) соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) $\frac{45\pi}{4} = \frac{45}{4} \cdot \pi = \left(10 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 5.$

Значит, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (см. табл. 1) имеем: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right) = P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) $-\frac{37\pi}{3} = -\frac{37}{3} \cdot \pi = -\left(12 + \frac{1}{3}\right) \cdot \pi = -12\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot (-6).$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $-\frac{\pi}{3}$. А числу $-\frac{\pi}{3}$ на числовой окружности соответствует та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (см. табл. 2) имеем: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = P_2\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) $45\pi = 44\pi + \pi = \pi + 2\pi \cdot 22$. Значит, числу 45π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π, — это точка $C(-1;\ 0)$. Итак,

$$P_3(45\pi) = P_3(-1;\ 0).$$

г) $-18\pi = 0 + 2\pi \cdot (-9)$. Значит, числу -18π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, — это точка $A(1;\ 0)$. Итак,

$$P_4(-18\pi) = P_4(1;\ 0).$$

Пример 2. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 45). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (см. второй макет — рис. 33), а значит, и любому числу вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Получили, как часто говорят в таких случаях, *две серии значений*: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

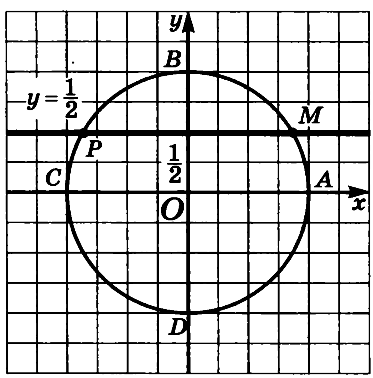


Рис. 45

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}$.

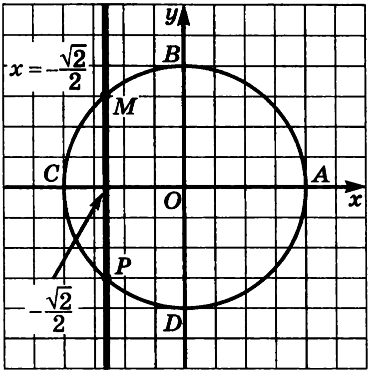


Рис. 46

Пример 3. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 46). Точка M соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$ (см. первый макет — рис. 32), а значит, и любому числу вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Замечание. В примере 3 можно было рассуждать немного по-другому: точка P соответствует числу $-\frac{3\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Получим две серии значений: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки M) и $t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки P). Чем это решение лучше по сравнению с приведенной записью ответа к примеру 3? Только тем, что обе серии значений можно охватить одной формулой: $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 45). Неравенству $y > \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP, т. е. дуги без концов M и P. Дуга MP —

это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек M и P — соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Пример 5. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y < \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 45). Неравенству $y < \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Пример 6. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 46). Неравенству $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Значит, аналитическая запись дуги PM имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Пример 7. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 46). Неравенству $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек M и P в этом случае — соответственно $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 8. Найти знаки декартовых координат точки $M(52)$.

Решение. Заметим, что $16\pi \approx 16 \cdot 3{,}14 = 50{,}24$, а потому $52 = 1{,}76 + 50{,}24 \approx 1{,}76 + 16\pi$. Это значит, что точка 52 на числовой окружности совпадает с точкой 1,76. Далее, $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} = 1{,}57$; значит, точка 1,76 расположена во второй четверти, а потому для нее $x < 0$, $y > 0$.

§ 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

Определение 1. Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа** t и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа** t и обозначают $\sin t$.

Итак (рис. 47),

$$\boxed{\begin{gathered}\text{если } M(t) = M(x;\, y), \text{ то}\\ x = \cos t,\\ y = \sin t.\end{gathered}}$$

Отсюда следует, что $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$.

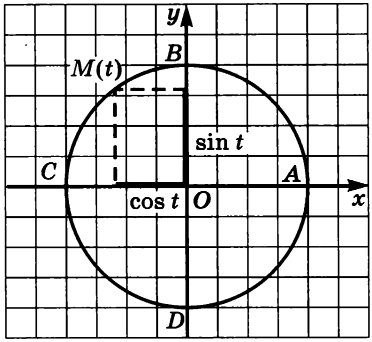


Рис. 47

Определение 2. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют **тангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{ctg} t$.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Говоря о $\operatorname{tg} t$, подразумевают, что $\cos t \neq 0$, а говоря о $\operatorname{ctg} t$, подразумевают, что $\sin t \neq 0$.

Мы отметили в § 5, что каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем

$x > 0$, $y > 0$ в первой четверти;

$x < 0$, $y > 0$ во второй четверти;

$x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти;

$x > 0$, $y < 0$ в четвертой четверти (см. рис. 41).

Это позволяет нам составить таблицу знаков синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям окружности (см. табл. 1).

Таблица 1

	Четверть окружности			
	1-я	2-я	3-я	4-я
$\cos t$	+	−	−	+
$\sin t$	+	+	−	−
$\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$	+	−	+	−

Уравнение числовой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$; фактически получено важное равенство, связывающее $\sin t$ и $\cos t$:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1.}$$

Мы говорили в § 5, что нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности, и прежде всего тех, которые представлены на первом и втором макетах (см. рис. 32 и 33 на с. 31). Необходимость этого стала теперь предельно ясной: опираясь на таблицы из § 5, мы без труда составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$.

Таблица 2

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 3

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Зная значения синуса и косинуса числа t, нетрудно вычислить соответствующие значения тангенса и котангенса. Тем не менее есть смысл составить таблицу основных значений тангенса и котангенса.

Таблица 4

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Пример 1. Вычислить $\cos t$ и $\sin t$, если:

а) $t = \frac{45\pi}{4}$; б) $t = -\frac{37\pi}{3}$; в) $t = 45\pi$; г) $t = -18\pi$.

Решение. а) При решении примера 1а из § 5 мы установили, что числу $t = \frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (см. табл. 2) имеем: $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$\cos\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) При решении примера 1б из § 5 мы установили, что числу $t = -\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (см. табл. 3) имеем: $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит,

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

в) При решении примера 1в из § 5 мы установили, что числу $t = 45\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π. Для точки π (см. табл. 2) имеем: $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$. Значит,

$$\cos 45\pi = -1; \quad \sin 45\pi = 0.$$

г) В примере 1г из § 5 мы установили, что числу $t = -18\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0. Для точки 0 (см. табл. 2) имеем: $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Значит,

$$\cos(-18\pi) = 1; \quad \sin(-18\pi) = 0.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 2 из § 5.

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $k \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 3 из § 5.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ (или $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$).

Пример 4. Решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 4 из § 5.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Пример 5. Решить неравенство $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 6 из § 5.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решить уравнения:

а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$.

Р е ш е н и е. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату 0 имеют точки A и C (см. рис. 47), они соответствуют числам 0 (точка A), π (точка C), 2π (точка A), 3π (точка C), $-\pi$ (точка C), -2π (точка A) и т. д. Обобщая, это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πk.

Итак, решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид

$$t = \pi k.$$

б) Ординату 1 имеет точка B числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

в) Ординату -1 имеет точка D числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу $-\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Итак, решения уравнения $\sin t = -1$ имеют вид

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: а) $t = \pi k$; б) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 7. Решить уравнения:

а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу 0 имеют точки B и D (см. рис. 47), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2}$ (точка B), $\frac{3\pi}{2}$ (точка D), $\frac{5\pi}{2}$ (точка B), $\frac{7\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{3\pi}{2}$ (точка B) и т. д. Обобщая, это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

б) Абсциссу 1 имеет точка A числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу 0, а значит, и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид

$$t = 2\pi k.$$

в) Абсциссу -1 имеет точка C числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу π, а значит, и всем числам вида $\pi + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид

$$t = \pi + 2\pi k.$$

Ответ: а) $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$; б) $t = 2\pi k$; в) $t = \pi + 2\pi k$.

З а м е ч а н и е. Напомним еще раз о нашей договоренности: параметр k (или n) принимает любые целочисленные значения ($k \in \mathbf{Z}$), мы это постоянно подразумеваем, но для краткости не всегда записываем.

Впредь, говоря о $\operatorname{tg} t$ или $\operatorname{ctg} t$, мы будем подразумевать (а иногда и записывать), что аргумент t принимает только допустимые значения: для $\operatorname{tg} t$ они определяются условием $\cos t \neq 0$, т. е. $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (см. пример 7а); для $\operatorname{ctg} t$ они определяются условием $\sin t \neq 0$, т. е. $t \neq \pi k$ (см. пример 6а).

Завершая разговор о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе, докажем некоторые важные свойства.

Свойство 1. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t; \\ \cos(-t) &= \cos t; \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(-t) &= -\operatorname{tg} t; \\ \operatorname{ctg}(-t) &= -\operatorname{ctg} t. \end{aligned}}$$

Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности (рис. 48), т. е. симметричная точке M относительно оси абсцисс. У таких точек одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У таких точек равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты. А это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$.

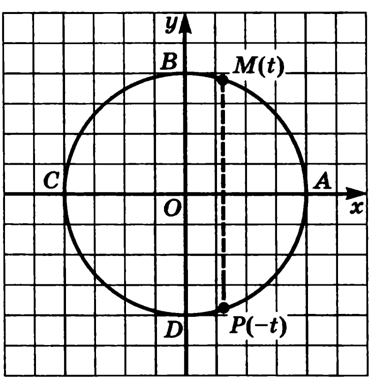


Рис. 48

Далее,

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$ ●

Свойство 2. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(t + 2\pi k) = \sin t;\\ &\cos(t + 2\pi k) = \cos t.\end{aligned}}$$

Это очевидно, поскольку числам t и $t + 2\pi k$ соответствует одна и та же точка числовой окружности (чем мы уже не раз пользовались).

Свойство 3. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(t + \pi) = -\sin t;\\ &\cos(t + \pi) = -\cos t;\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t;\\ &\operatorname{ctg}(t + \pi) = \operatorname{ctg} t.\end{aligned}}$$

Например,

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $t + \pi$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно центра окружности — начала координат (рис. 49). У таких точек абсциссы равны по модулю, но противоположны по знаку; то же можно сказать про ординаты точек. Это значит что

$$\cos(t + \pi) = -\cos t;$$
$$\sin(t + \pi) = -\sin t.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}(t + \pi) = \frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(t + \pi) = \frac{\cos(t+\pi)}{\sin(t+\pi)} = \frac{-\cos t}{-\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t. \quad \bullet$$

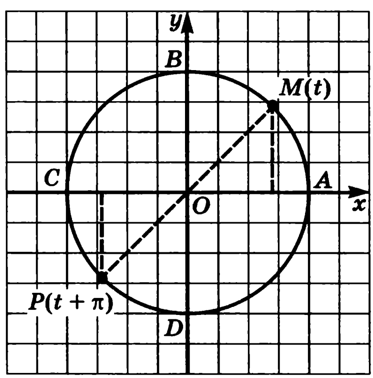


Рис. 49

Выполняются и такие равенства:

$\operatorname{tg}(t + 2\pi) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{tg}(t - \pi) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(t + 2\pi) = \operatorname{ctg} t$ и т. д.

Вообще можно записать так:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(t+\pi k) &= \operatorname{tg} t; \\ \operatorname{ctg}(t+\pi k) &= \operatorname{ctg} t. \end{aligned}}$$

Свойство 4. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos t; \\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t. \end{aligned}}$$

Доказательство. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, а числу $t+\frac{\pi}{2}$ — точка P (рис. 50). Сразу обратим внимание на важное обстоятельство: если точка M находится в первой четверти, то точка P — во второй; если точка M находится во второй четверти, то точка P — в третьей (как на рис. 50) и т. д. Дуги AM и BP на рисунке 50 равны, соответственно равны и прямоугольные треугольники OKM и OLP. Значит, $OK = OL$, $MK = PL$. Из этих равенств, учитывая замечание о расположении точек M и P в четвертях числовой окружности, делаем два вывода:

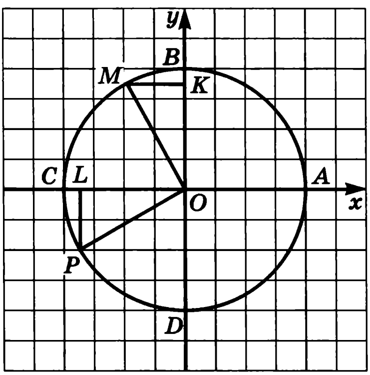


Рис. 50

1) ордината точки P и по модулю, и по знаку совпадает с абсциссой точки M. Это значит, что

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t;$$

2) абсцисса точки P по модулю равна ординате точки M, но отличается от нее знаком. Это значит, что

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t. \qquad \bullet$$

Пример 8. Доказать тождества:

а) $\sin(\pi - t) = \sin t$; в) $\sin(2\pi - t) = -\sin t$;

б) $\cos(\pi - t) = -\cos t$; г) $\cos(2\pi - t) = \cos t$.

Р е ш е н и е. а) Запишем $\sin(\pi - t)$ в виде $\sin(-t + \pi)$. Применив к выражению $\sin(-t + \pi)$ свойство 3, получим:

$$\sin(-t + \pi) = -\sin(-t).$$

По свойству 1, $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $-\sin(-t) = \sin t$, а потому $\sin(-t + \pi) = \sin t$.

Итак, $\sin(\pi - t) = \sin t$, что и требовалось доказать.

б) Запишем $\cos(\pi - t)$ в виде $\cos(-t + \pi)$. Применив к выражению $\cos(-t + \pi)$ свойство 3, получим: $\cos(-t + \pi) = -\cos(-t)$.

По свойству 1, $\cos(-t) = \cos t$. Значит, $\cos(\pi - t) = -\cos t$, что и требовалось доказать.

в) $\sin(2\pi - t) = \sin(-t + 2\pi) = \sin(-t) = -\sin t$;

г) $\cos(2\pi - t) = \cos(-t + 2\pi) = \cos(-t) = \cos t$.

Пример 9. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Р е ш е н и е. а) По свойству 1, $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$. Так как $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, то $-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

(мы воспользовались свойством 3, а точнее, его обобщением).

Итак,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$

(здесь мы также воспользовались свойством 3).

Для синуса и косинуса у нас есть геометрическая иллюстрация на числовой окружности. Можно дать и геометрическую иллюстрацию для тангенса. Возьмем на координатной плоскости числовую окружность, проведем касательную к ней в точке A и будем считать эту касательную числовой прямой, ориентированной так же, как ось y (рис. 51), и с началом в точке A. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, принадлежащая первой четверти. Из подобия треугольников OMK и OPA делаем вывод: $\frac{MK}{OK} = \frac{PA}{OA}$.

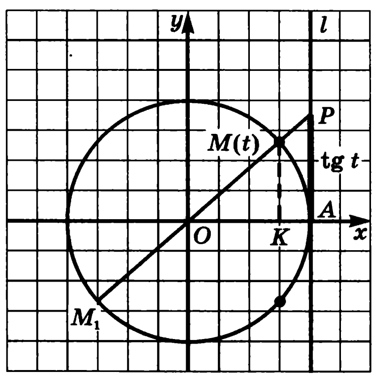


Рис. 51

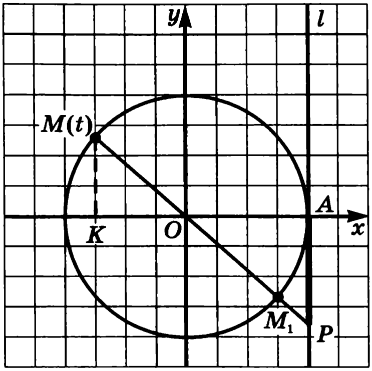


Рис. 52

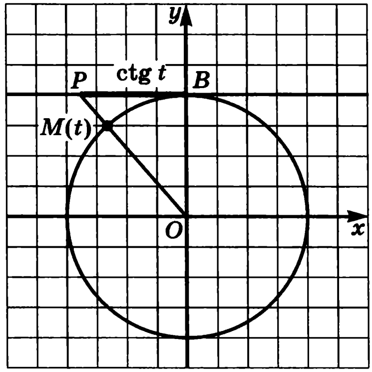


Рис. 53

Но $MK = \sin t$, $OK = \cos t$, $OA = 1$. Значит, $\dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{PA}{1}$, т. е. $PA = \operatorname{tg} t$.

Значит, $\operatorname{tg} t$ можно трактовать как координату точки P на числовой прямой l. Та же точка P характеризует значение тангенса для точки M_1, диаметрально противоположной точке M (см. рис. 51).

Пусть теперь числу t соответствует точка M числовой окружности, принадлежащая второй четверти (рис. 52). Из подобия треугольников OMK и OPA делаем тот же вывод: $\dfrac{MK}{OK} = \dfrac{PA}{OA}$. Здесь, как и выше, $MK = \sin t$, $OA = 1$, но $OK = -\cos t$ (поскольку речь идет о сторонах треугольника, длина которых выражается положительными числами, а $\cos t$ во второй четверти отрицателен). Значит, $\dfrac{\sin t}{-\cos t} = \dfrac{PA}{1}$, т. е. $PA = -\operatorname{tg} t$.

Итак, длина отрезка PA равна $-\operatorname{tg} t$, это — положительное число. Но мы договорились рассматривать касательную l как числовую прямую, это значит, что точка P соответствует отрицательному числу, противоположному длине отрезка PA. Вывод: точка P имеет на рассматриваемой числовой прямой координату $\operatorname{tg} t$. Так же обстоит дело для точки M_1, диаметрально противоположной точке M (рис. 52).

Итак, если числу t соответствует на числовой окружности точка M, то, проведя прямую OM, получим в пересечении ее с числовой прямой l точку P, которая имеет на числовой прямой l координату $\operatorname{tg} t$. Числовую прямую l называют *линией тангенсов*. С помощью линии тангенсов можно решать и обратную задачу: зная значение тангенса, найти на числовой окружности соответствующие точки (см. ниже пример 10).

Аналогично можно ввести в рассмотрение *линию котангенсов* (рис. 53).

Пример 10. Решить уравнение: а) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} t = -1$; в) $\operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$.

Решение. а) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(\sqrt{3})$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 54) — это и есть точки M_1, M_2, соответствующие тем значениям t, для которых

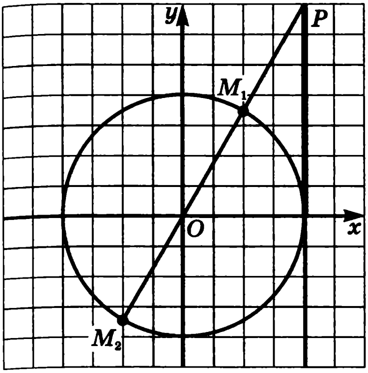


Рис. 54

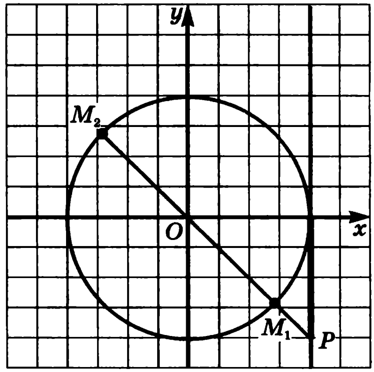


Рис. 55

$\text{tg}\, t = \sqrt{3}$. Точка M_1 соответствует значениям $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = \frac{\pi}{3} + \pi n$.

б) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(-1)$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 55). Точка M_1 соответствует значениям $t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

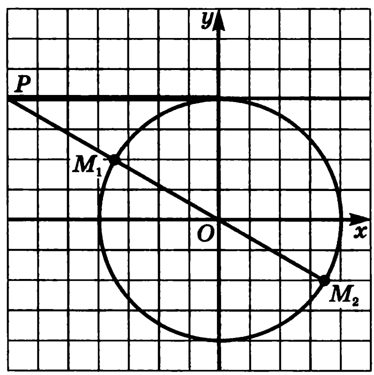


Рис. 56

в) Отметим на линии котангенсов точку $P = P(-\sqrt{3})$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 56). Точка M_1 соответствует значениям $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = \frac{5\pi}{6} + \pi n$. ◁■

Пример 11. Решить неравенство: а) $\text{tg}\, t > \sqrt{3}$; б) $\text{tg}\, t < -1$; в) $\text{ctg}\, t \geqslant -\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. а) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(\sqrt{3})$. Неравенство $\text{tg}\, t > \sqrt{3}$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие выше точки P. Прямая OP пересекает числовую окружность

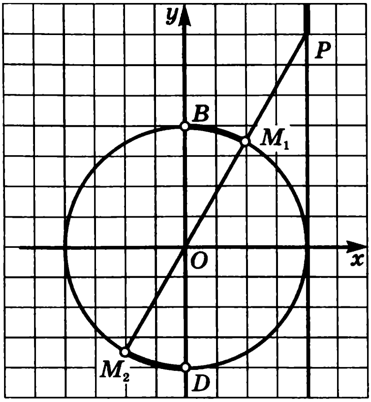


Рис. 57

в точках M_1, M_2; точкам, расположенным выше точки P, соответствуют точки открытых дуг M_1B, M_2D (рис. 57). Аналитическая запись дуги M_1B такова: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги M_2D такова: $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить:

$$\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

б) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(-1)$. Неравенство $\operatorname{tg} t < -1$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие ниже точки P. Прямая OP пересекает числовую окружность в точках M_1, M_2; точкам, расположенным ниже точки P, соответствуют точки открытых дуг DM_1, BM_2 (рис. 58). Аналитическая запись дуги DM_1 такова: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги BM_2 такова: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

в) Отметим на линии котангенсов точку $P = P\left(-\sqrt{3}\right)$. Неравенство $\operatorname{ctg} t \geqslant -\sqrt{3}$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие правее точки P, и сама точка P. Прямая OP пересекает числовую окружность в точках M_1, M_2; точкам, расположенным правее точки P, соответствуют точки открытых дуг AM_1, CM_2 (рис. 59). Аналитическая

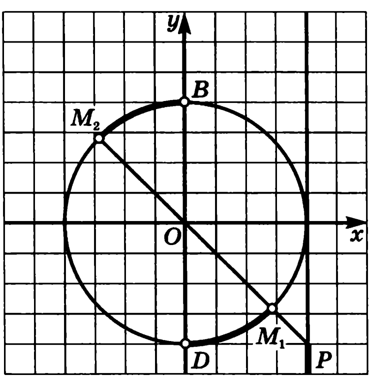


Рис. 58

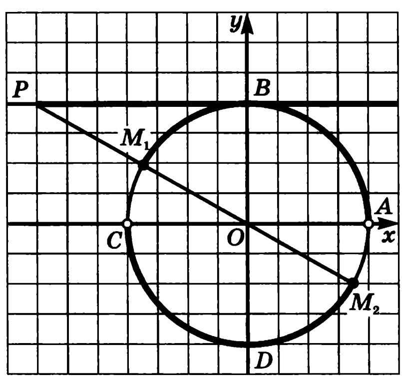


Рис. 59

запись дуги AM_1 такова: $2\pi k < t \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги CM_2 такова: $\pi + 2\pi k < t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $\pi n < t \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента

Каким бы ни было действительное число t, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число $\sin t$. Правда, правило соответствия довольно сложное и заключается в следующем.

Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:

1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку $(1; 0)$;

2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;

3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть $\sin t$.

Фактически речь идет о функции $s = \sin t$, где t — любое действительное число. Мы умеем вычислять некоторые значения этой функции (например, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и т. д.), знаем некоторые ее свойства.

Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: $s = \cos t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$. Все эти функции называют *тригонометрическими функциями числового аргумента* t.

Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций. Некоторые из этих соотношений вы уже знаете:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1;}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1 \text{ при } t \neq \frac{\pi k}{2}.}$$

Пример 1. Упростить выражение:

а) $1 + \operatorname{tg}^2 t$; б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t$.

Решение. а) $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t}$.

Мы получили еще две важные формулы:

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Всюду, напомним, подразумевается, что $k \in \mathbf{Z}$.

Полученные формулы используются в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения других тригонометрических функций того же аргумента.

Пример 2. Известно, что $\sin t = \dfrac{3}{5}$ и $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим:

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t.$$

По условию $\sin t = \dfrac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \dfrac{16}{25}$ находим: $\cos t = \dfrac{4}{5}$ или $\cos t = -\dfrac{4}{5}$.

По условию, аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух найденных возможных соотношений выбираем первое: $\cos t = \dfrac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся соотношением $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

По условию $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, значит, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

Отсюда находим, что $\cos^2 t = \frac{144}{169}$, значит, $\cos t = \frac{12}{13}$ или $\cos t = -\frac{12}{13}$.

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t < 0$. Поэтому из двух указанных выше возможностей выбираем вторую: $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Зная значения $\operatorname{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\sin t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}; \ \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

§ 8. *Тригонометрические функции углового аргумента*

Термины «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс», которые мы ввели выше, на самом деле уже были вам знакомы, правда, до сих пор их использовали в другом смысле: в геометрии и физике вы рассматривали синус, косинус, тангенс и котангенс угла (а не числа, как это было в предыдущих параграфах).

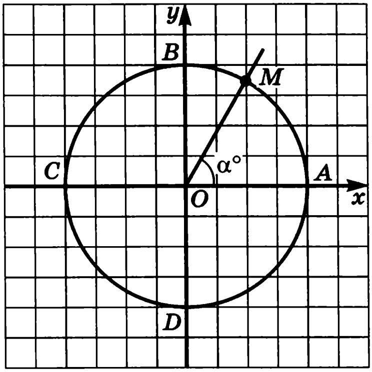


Рис. 60

Из геометрии известно, что синус (косинус) острого угла — это отношение катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе, а тангенс (котангенс) угла — это отношение катетов прямоугольного треугольника. Совсем другой подход к понятиям синуса, косинуса, тангенса и котангенса мы развивали в предыдущих параграфах. На самом деле все тесно взаимосвязанно, в чем мы сейчас убедимся.

Возьмем угол с градусной мерой $\alpha°$ и расположим его в модели «числовая окружность на координатной плоскости» так, как показано на рисунке 60: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс. Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой M. Ординату точки M естественно считать *синусом угла* $\alpha°$, а абсциссу этой точки — *косинусом угла* $\alpha°$.

Для нахождения синуса или косинуса угла $\alpha°$ совсем необязательно каждый раз проводить подобные построения. Достаточно заметить, что дуга AM составляет такую же часть единичной окружности, которую угол $\alpha°$ составляет от угла 360°. Если длину дуги AM обозначить буквой t, то получим:

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{t}{2\pi};$$

$$t = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha° = \sin t = \sin\frac{\pi\alpha}{180}; \quad \cos\alpha° = \cos t = \cos\frac{\pi\alpha}{180}.$$

Например,

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi\cdot 30}{180} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 90° = \cos\frac{\pi\cdot 90}{180} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Говорят, что 30° — это *градусная мера угла*, а $\frac{\pi}{6}$ — *радианная мера* того же угла: $30° = \frac{\pi}{6}$ *рад*. Аналогично: $90° = \frac{\pi}{2}$ *рад*. Вообще

$$\alpha° = \frac{\pi\alpha}{180}\ рад.$$

В частности,

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \textit{рад}.}$$

Отсюда, в свою очередь, получаем:

$$\boxed{1\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}.}$$

Например,

$$35^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 35 = \frac{7\pi}{36}\ \textit{рад};\quad \frac{2\pi}{3}\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

Для краткости условимся обозначение *рад* опускать, т. е. вполне допустимой является, например, следующая запись:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180} \cdot 45\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Так что же такое 1 радиан? Вы знаете, что есть различные меры длины: сантиметры, метры, ярды и т. д. Есть и различные меры величины угла. Мы рассматриваем центральные углы единичной окружности. **Угол в 1°** — это центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{360}$ часть окружности. **Угол в 1 радиан** — это центральный угол, опирающийся в единичной окружности на дугу длиной 1, а в окружности произвольного размера — *на дугу, длина которой равна радиусу окружности.*

Из формулы $1\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$ получаем:

$$\boxed{1\ \textit{рад} \approx 57{,}3^\circ.}$$

Говоря о функции $s = \sin t$ (или о любой другой тригонометрической функции), мы можем считать независимую переменную t числовым аргументом, как это было в предыдущих параграфах, но можем считать ее и мерой угла, т. е. угловым аргументом. Рассматривая ту или иную тригонометрическую функцию, мы можем считать ее функцией как числового, так и углового аргумента. В основном мы будем говорить о функциях числового аргумента.

Завершая параграф, убедимся в том, что определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, с которыми вы познакомились в курсе геометрии, представляют собой частные случаи тех определений, что были предложены в § 6.

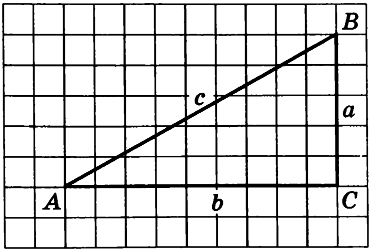


Рис. 61

***Теорема*. Если a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC (рис. 61), то выполняются следующие равенства:**

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Доказательство. Совместим прямоугольный треугольник ABC с числовой окружностью так, как показано на рисунке 62: вершину A поместим в центр O окружности, катет AC «пустим» по положительному направлению оси абсцисс. Точку пересечения прямой AB с окружностью обозначим буквой M. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую AC. Заметим, что AP и MP — абсцисса и ордината точки M, т. е. $AP = \cos A$, $MP = \sin A$. Учтем также, что $AM = 1$ и что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

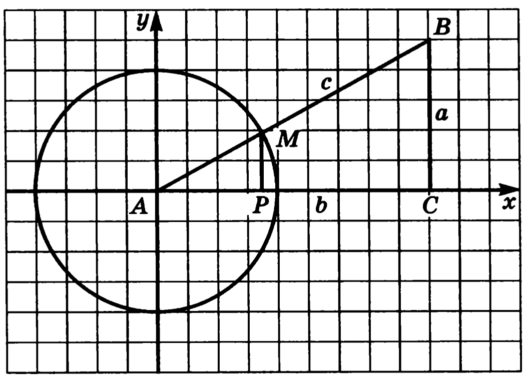


Рис. 62

Так как треугольники AMP и ABC подобны, то

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} = \frac{\cos A}{b}.$$

Из пропорции $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c}$ получаем: $\sin A = \frac{a}{c}$.

Из пропорции $\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c}$ получаем: $\cos A = \frac{b}{c}$.

Далее, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$; аналогично, $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$. ●

§ 9. Формулы приведения

Если под знаком тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\pi + t$, $\pi - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$, $\frac{3\pi}{2} - t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где n — произвольное целое число, то такое выражение всегда можно привести к более простому виду, при котором под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент t. Соответствующие формулы обычно называют *формулами приведения*. Некоторые из этих формул мы вывели в § 6, говоря о свойствах синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

$$\sin(\pi + t) = -\sin t;$$
$$\cos(\pi + t) = -\cos t;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t;$$
$$\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t;$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t.$$

Используя свойства, отмеченные в § 6, можно вывести ряд других формул приведения. Например,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\cos t;$$

$$\cos(\pi - t) = \cos(\pi + (-t)) = -\cos(-t) = -\cos t.$$

Формул приведения очень много. Выводить их каждый раз довольно утомительно. Можно составить таблицу формул приведения и постоянно ею пользоваться, но она громоздка. Поэтому был придуман простой и удобный способ их запоминания *(мнемоническое правило)*. Он заключается в следующем.

1) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится выражение $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$ или $2\pi - t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить.

2) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$ или $\frac{3\pi}{2} - t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить на родственное (синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс).

3) Перед полученной функцией от аргумента t надо поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т. е. когда под знаком тригонометрической функции содержится выражение $90° + \alpha$, $90° - \alpha$, $180° + \alpha$ и т. д.

Попробуем применить сформулированное правило сначала к уже перечисленным в этом параграфе формулам приведения.

Преобразуем $\sin(\pi + t)$. Наименование функции сохраняется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(\pi + t) = -\sin t$ (так и записано на с. 63).

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$. Наименование функции изменяется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} + t$ — аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ (так и записано на с. 63).

А теперь воспользуемся сформулированным правилом для получения пары новых формул приведения.

Преобразуем $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$. Наименование функции следует изменить: пишем $\mathrm{tg}\, t$. Далее, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{3\pi}{2} - t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция котангенс имеет знак плюс. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$.

Преобразуем $\sin(360° - \alpha)$. Наименование функции следует сохранить (не забывайте, что $360° = 2\pi$): пишем $\sin \alpha$. Далее, если считать, что $0 < \alpha < 90°$, получим, что $360° - \alpha$ — аргумент из четвертой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(360° - \alpha) = -\sin \alpha$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента t занимает более сложное выражение. Например, мы видели выше, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$, значит, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 5t\right) = \operatorname{tg} 5t$, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ и т. д.

§ 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график

В § 7 мы уже познакомились с функцией $s = \sin t$. Отметим свойства этой функции.

Свойства функции $s = \sin t$

Свойство 1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел.

Свойство 2. $s = \sin t$ — нечетная функция.

В § 6 мы уже доказали, что для любого t выполняется равенство $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $s = \sin t$ — нечетная функция.

График функции $s = \sin t$, как график любой нечетной функции, симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат tOs.

Свойство 3. Функция $s = \sin t$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности (от 0 до $\frac{\pi}{2}$) ордината постепенно

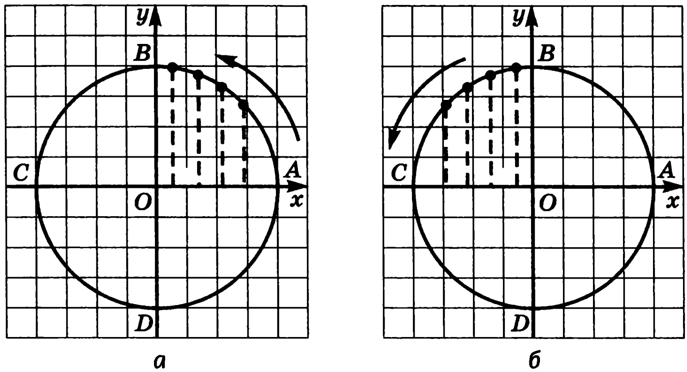


Рис. 63

увеличивается (от 0 до 1 — рис. 63, *а*), а при движении по второй четверти числовой окружности (от $\frac{\pi}{2}$ до π) ордината постепенно уменьшается (от 1 до 0 — рис. 63, *б*).

Свойство 4. Функция $s = \sin t$ ограничена и снизу и сверху.

Ограниченность функции $s = \sin t$ следует из того, что для любого t справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

Свойство 5. $s_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$); $s_{\text{наиб}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$).

Воспользовавшись полученными свойствами, построим график интересующей нас функции. Обратим внимание, что вместо $s = \sin t$ будем писать $y = \sin x$, так как привычнее запись $y = f(x)$, а не $s = f(t)$. Значит, и строить график будем в привычной системе координат xOy.

Сначала построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. При этом договоримся о следующем масштабе на осях координат: в тетради в клеточку роль единичного отрезка на оси y составит отрезок в две клеточки; на оси x единичный отрезок (две клеточки) будем считать равным $\frac{\pi}{3}$. Фактически мы полагаем, что $\pi = 3$, что не совсем соответствует действительности (на самом деле $\pi \approx 3{,}14$), но на это при построении графика особого внимания обращать не будем.

Составим таблицу значений функции $y = \sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной кривой, учтя при этом, что функция возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Это график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 64). Обратите внимание на плавность графика в точке $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$ и на то, что из начала координат кривая выходит как бы под углом 45°. О том, почему так происходит, поговорим в § 28.

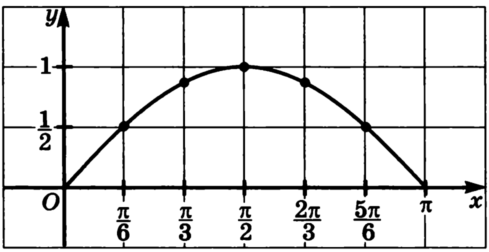


Рис. 64

Добавив к построенному графику линию, симметричную ему относительно начала координат, получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 65 — здесь масштаб уменьшили в два раза по сравнению с рис. 64).

А теперь построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[\pi; 3\pi]$. Обратите внимание: если $x \in [-\pi; \pi]$, то $(x + 2\pi) \in [\pi; 3\pi]$.

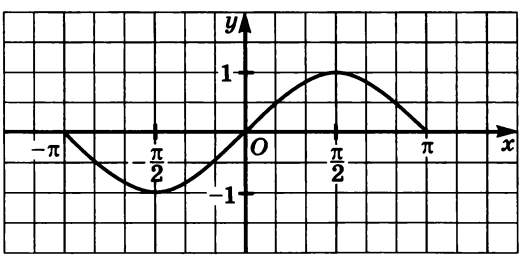


Рис. 65

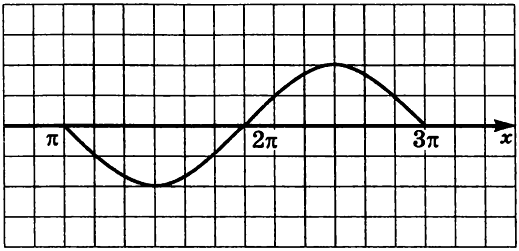


Рис. 66

Но $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Это означает, что в точке $x + 2\pi$ функция $y = \sin x$ принимает то же значение, что и в точке x. Иными словами, на отрезке $[\pi; 3\pi]$ график функции $y = \sin x$ выглядит так же, как и на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 66). И на отрезках $[3\pi; 5\pi]$, $[5\pi; 7\pi]$, $[-3\pi; -\pi]$ и т. д. график этой функции выглядит так же, как на отрезке $[-\pi; \pi]$. Окончательный вид графика функции $y = \sin x$ (в уменьшенном масштабе) представлен на рисунке 67.

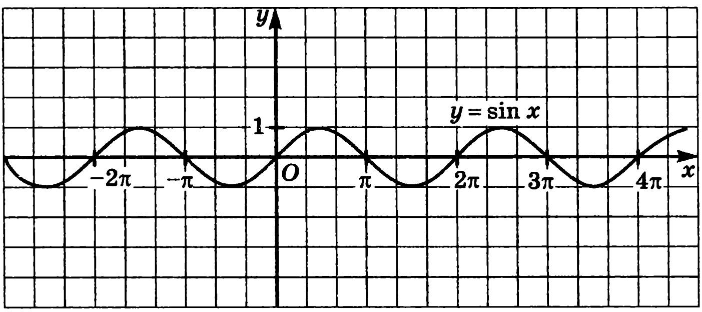


Рис. 67

Линию, служащую графиком функции $y = \sin x$, называют **синусоидой**. Ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 65 или 66, называют *волной синусоиды*, а ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 64, называют *полуволной* или *аркой синусоиды*.

Опираясь на построенный график, отметим еще несколько свойств функции $y = \sin x$.

Свойство 6. *Функция $y = \sin x$ возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и убывает на любом отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$*, где $k \in \mathbf{Z}$.

Свойство 7. $y = \sin x$ — непрерывная функция.

Непрерывность функции, напомним, означает, что график функции сплошной, не имеет разрыва. Это, конечно, весьма поверхностное представление о данном свойстве, более точное истолкование непрерывности функции мы получим в § 26.

Свойство 8. Область значений функции — отрезок $[-1; 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = x - \pi$.

Решение.

1) Возьмем две функции: $y = \sin x$ и $y = x - \pi$.

2) Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 68).

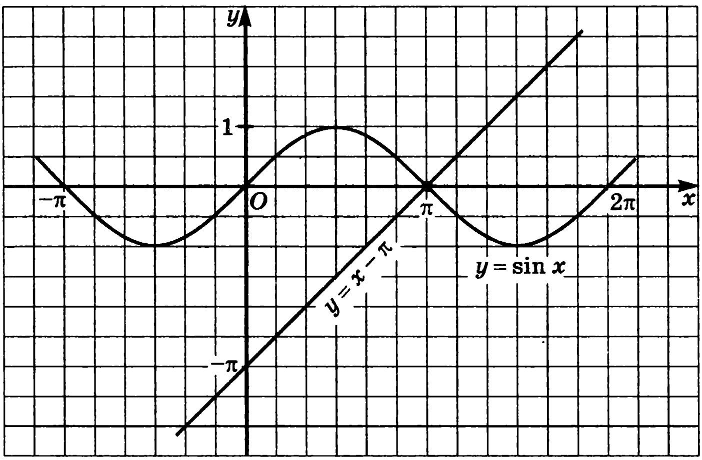


Рис. 68

3) Построим график линейной функции $y = x - \pi$. Это прямая линия, проходящая через точки $(0; -\pi)$ и $(\pi; 0)$ (рис. 68).

4) Построенные графики пересекаются в одной точке — в точке $A\ (\pi; 0)$. Проверка показывает, что это на самом деле так: $\sin \pi = 0$ и $\pi - \pi = 0$. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень π — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = \pi$.

Пример 2. Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Решение. Искомый график получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом на $\frac{\pi}{3}$ единиц вправо и 2 единицы вверх (рис. 69).

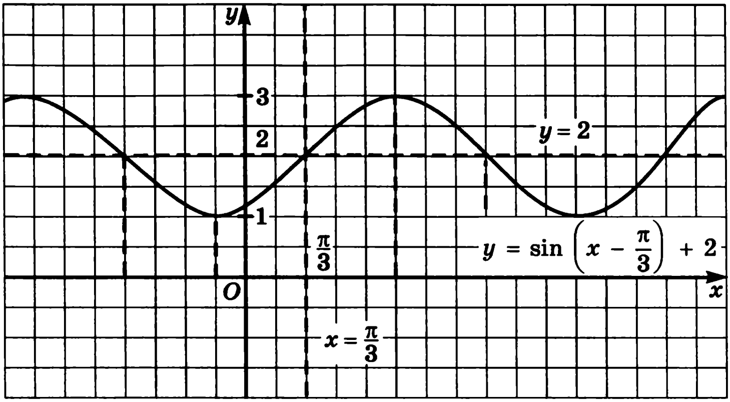


Рис. 69

Пример 3. **Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.**

Решение. Построив график функции $y = \sin x$ и выделив его часть на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$, убеждаемся (рис. 70), что $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{5\pi}{6}$), а $y_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{3\pi}{2}$).

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$; $y_{\text{наим}} = -1$.

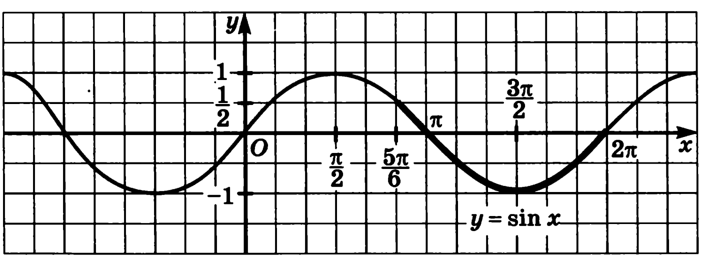


Рис. 70

§ 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график

Рассказ о функции $y = \cos x$ можно было бы построить по той же схеме, которая была использована в § 10 для функции $y = \sin x$. Но мы выберем путь, быстрее приводящий к цели: воспользуемся формулой приведения $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Что дает эта формула?

Она позволяет утверждать, что функции $y = \cos x$ и $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ тождественны, значит, их графики совпадают.

График функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево. Это и будет график функции $y = \cos x$ (рис. 71).

График функции $y = \cos x$, как и график функции $y = \sin x$, называют синусоидой (что вполне естественно).

Свойства функции $y = \cos x$

Свойство 1. $D(f) = (-\infty; \infty)$.

Свойство 2. $y = \cos x$ — четная функция.

Это следует из выведенной в § 6 формулы $\cos(-t) = \cos t$; четность функции иллюстрирует график на рисунке 71 — он симметричен относительно оси y.

Свойство 3. Функция убывает на отрезке $[0; \pi]$, возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и т. д.

Свойство 4. Функция ограничена и снизу и сверху.

Свойство 5. $y_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = \pi + 2\pi k$); $y_{\text{наиб}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = 2\pi k$).

Свойство 6. $y = \cos x$ — непрерывная функция.

Свойство 7. $E(f) = [-1; 1]$.

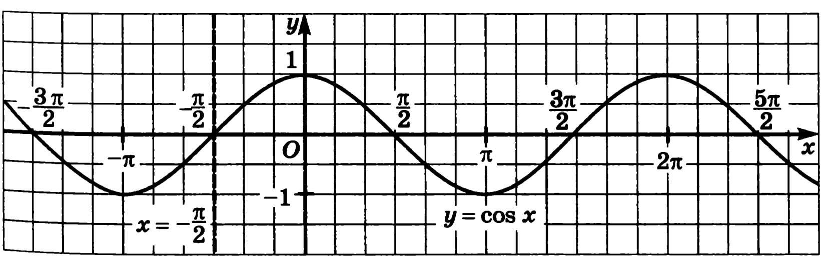


Рис. 71

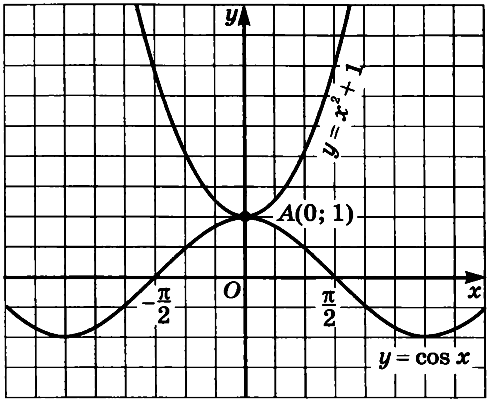


Рис. 72

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Р е ш е н и е.

1) Возьмем две функции: $y = \cos x$ и $y = x^2 + 1$.

2) Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 72).

3) Построим график функции $y = x^2 + 1$. Это парабола (см. рис. 72).

4) Построенные графики имеют одну общую точку $A(0; 1)$. Значит, заданное уравнение имеет один корень 0 — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \cos x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим график функции $y = \sin x$ и выделим его часть (рис. 73) на луче $(-\infty; 0]$. Затем построим график функции $y = \cos x$ и выделим его часть (рис. 74) на открытом луче $(0; +\infty)$. Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 75).

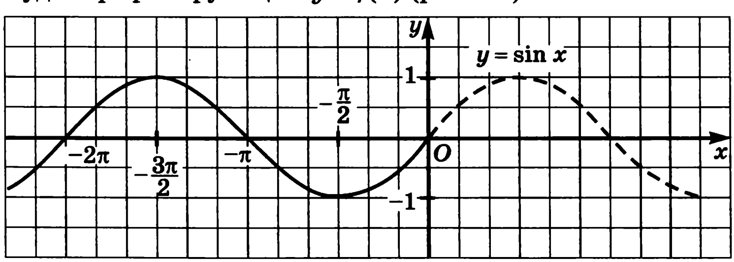


Рис. 73

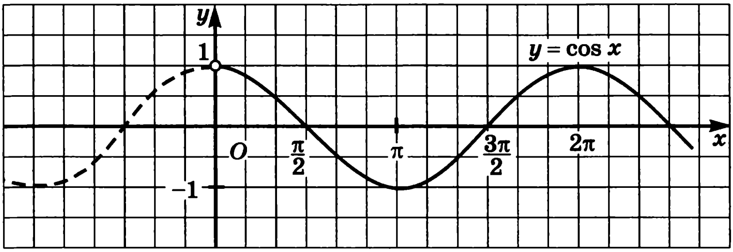


Рис. 74

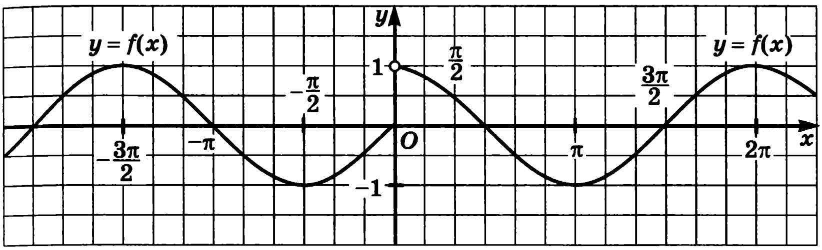


Рис. 75

§ 12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

В предыдущих параграфах мы использовали семь свойств функций: область определения, четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения, непрерывность, область значений функции. Использовали мы эти свойства либо для того, чтобы построить график функции (так было, например, в § 10), либо для того, чтобы прочитать построенный график. Теперь введем еще одно (восьмое) свойство функции, которое можно заметить на построенных выше графиках функций $y = \sin x$ (см. рис. 67), $y = \cos x$ (см. рис. 71).

Определение. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют **периодом функции** $y = f(x)$.

Отсюда следует, что, поскольку для любого x справедливы равенства

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi),$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi),$$

функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ *являются периодическими, причем число* 2π *служит периодом и той и другой функции.*

Периодичность — это и есть обещанное восьмое свойство функций.

А теперь посмотрите на график функции $y = \sin x$ (см. рис. 67). Чтобы построить синусоиду, достаточно построить одну ее волну (на отрезке $[0; 2\pi]$ или на отрезке $[-\pi; \pi]$), а затем сдвинуть эту волну по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т. д. В итоге с помощью одной волны мы построим весь график.

Посмотрим с этой же точки зрения на график функции $y = \cos x$ (см. рис. 71). И здесь для построения графика достаточно сначала построить одну волну, например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а затем сдвинуть ее по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т. д.

Обобщая, делаем следующий вывод.

Если функция $y = f(x)$ *имеет период* T, *то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины* T (чаще всего берут промежуток с концами в точках 0 и T или $-\frac{T}{2}$ и $\frac{T}{2}$), *а затем сдвинуть эту ветвь по оси* x *вправо и влево на* T, $2T$, $3T$ *и т. д.*

У периодической функции бесконечно много периодов: если T — период, то и $2T$ — период, и $3T$ — период, и $-T$ — период; вообще *периодом является любое число вида* kT, *где* $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Обычно стараются, если это возможно, выделить наименьший положительный период, его называют *основным периодом*. Для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ основной период равен 2π.

Итак, ***любое число вида*** $2\pi k$, ***где*** $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, ***является периодом функций*** $y = \sin x$, $y = \cos x$; 2π — ***основной период и той и другой функции.***

Пример. Найти основной период функции:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos 0{,}5x$.

Решение. а) Пусть T — основной период функции $y = \sin 3x$. Введем обозначение: $f(x) = \sin 3x$. Тогда

$$f(x + T) = \sin 3(x + T) = \sin (3x + 3T).$$

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\sin (3x + 3T) = \sin 3x$. Значит, $3T = 2\pi n$. Но поскольку речь идет о нахождении основного периода, получаем: $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

б) Пусть T — основной период функции $y = \cos 0{,}5x$. Введем обозначение: $f(x) = \cos 0{,}5x$. Тогда

$$f(x + T) = \cos 0{,}5(x + T) = \cos (0{,}5x + 0{,}5T).$$

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\cos (0{,}5x + 0{,}5T) = \cos 0{,}5x$. Значит, $0{,}5T = 2\pi n$. Но поскольку речь идет об отыскании основного (т. е. наименьшего положительного) периода, получаем: $0{,}5T = 2\pi$, $T = 4\pi$.

Ответ: а) $T = \frac{2\pi}{3}$; б) $T = 4\pi$.

Обобщением результатов, полученных в примере, является следующее утверждение: *основной период функции* $y = \sin kx$ ($y = \cos kx$) *равен* $\left|\frac{2\pi}{k}\right|$.

§ 13. Преобразования графиков тригонометрических функций

В курсе алгебры 8—9-го классов вы научились, зная график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a) + b$. Все эти графики получаются из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования параллельного переноса: на $|a|$ единиц масштаба вправо или влево вдоль оси x и на $|b|$ единиц масштаба вверх или вниз вдоль оси y (мы использовали этот прием в § 1, 10 и 11). Теперь мы познакомимся еще с двумя преобразованиями, позволяющими, зная график функции $y = f(x)$, довольно быстро строить графики функций $y = mf(x)$ и $y = f(kx)$, где m и k — любые действительные числа (кроме нуля).

Задача 1. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — положительное число.

Решение. Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением ординат соответствующих точек графика функции $y = f(x)$ на число m. Такое преобразование графика обычно называют *растяжением от оси x с коэффициентом m*. Отметим, что при этом преобразовании остаются на месте точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью x, т. е. точки, удовлетворяющие уравнению $f(x) = 0$.

Если $m < 1$, то предпочитают говорить не о растяжении с коэффициентом m, а о *сжатии к оси x с коэффициентом* $\frac{1}{m}$. Например, если $m = \frac{1}{3}$, то говорят не о растяжении с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о сжатии с коэффициентом 3.

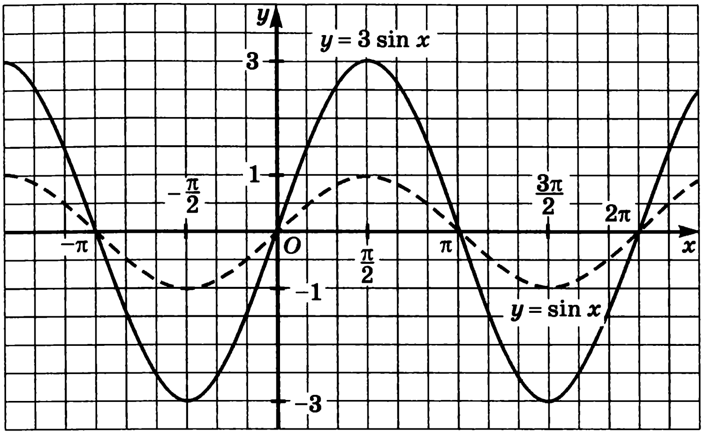


Рис. 76

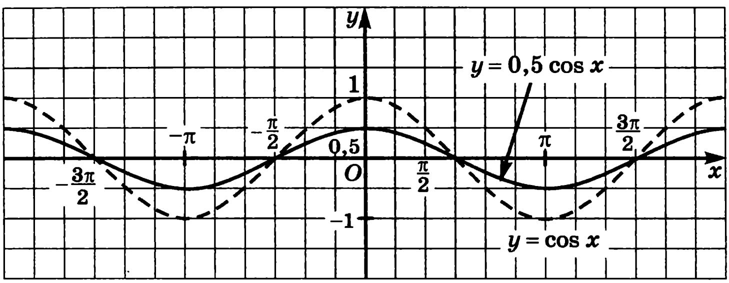


Рис. 77

На рисунке 76 показаны графики функций $y = \sin x$ и $y = 3 \sin x$, а на рисунке 77 — графики функций $y = \cos x$ и $y = 0{,}5 \cos x$.

На практике обычно, выполняя сжатие или растяжение графика функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, сначала работают с одной полуволной синусоиды, а потом достраивают весь график.

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где $m = -1$.

Решение. Речь идет о построении графика функции $y = -f(x)$. Ординаты точек графика функции $y = -f(x)$ отличаются от соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$ только знаком. Точки $(x; f(x))$ и $(x; -f(x))$ симметричны относительно оси x (рис. 78). Значит, *график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x* (впрочем, об этом мы уже говорили выше; см., например, с. 7). На рисунке 79 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = -\cos x$.

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — отрицательное число.

Р е ш е н и е. При $m < 0$ справедливо равенство $mf(x) = -|m|f(x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = -|m|f(x)$. Это можно сделать в три шага:

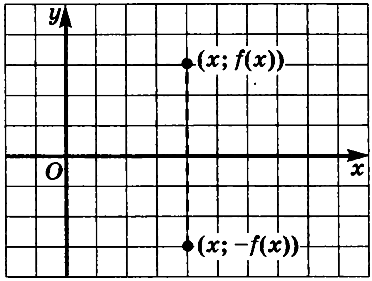


Рис. 78

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его растяжение от оси x с положительным коэффициентом $|m|$;

3) растянутый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

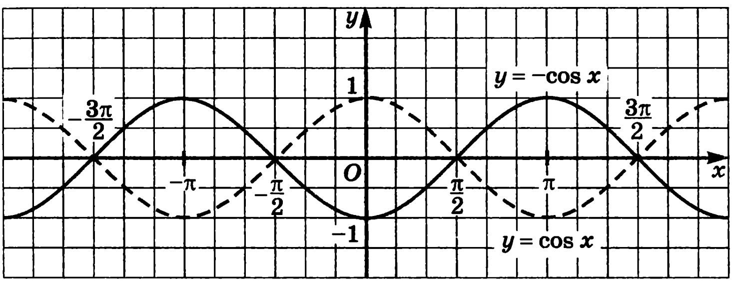


Рис. 79

Пример 1. Построить график функции $y = -1{,}5 \sin x$.

Р е ш е н и е. 1) Построим график функции $y = \sin x$; для начала достаточно построить одну полуволну графика (пунктирная линия на рис. 80).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 1,5; получим одну полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ (тонкая линия на рис. 80).

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -1{,}5 \sin x$ (она выделена на рис. 80).

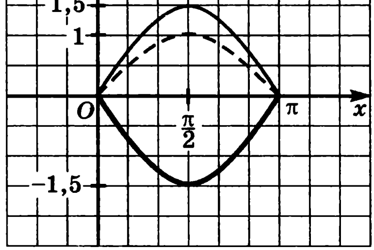


Рис. 80

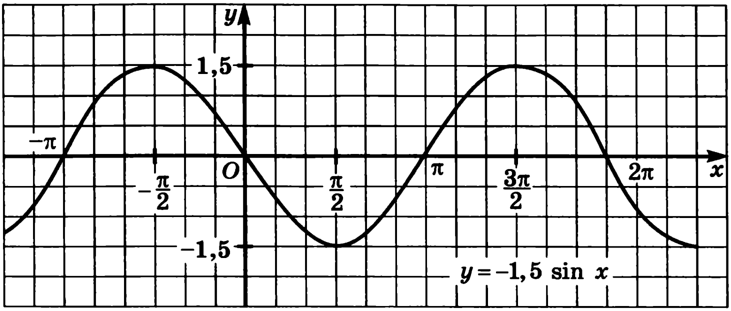


Рис. 81

4) С помощью построенной полуволны получаем весь график функции $y = -1{,}5 \sin x$ (рис. 81).

Задача 4. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — положительное число.

Решение. Чтобы вам было проще понять суть дела, рассмотрим конкретный пример, когда $k = 2$. Как построить график функции $y = f(2x)$, если известен график функции $y = f(x)$?

Пусть, например, на графике функции $y = f(x)$ имеются точки (4; 7) и (−2; 3). Это значит, что $f(4) = 7$ и $f(-2) = 3$. Куда переместятся эти точки, когда мы будем строить график функции $y = f(2x)$? Если $x = 2$, то $y = f(2x) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 7$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (2; 7). Далее, если $x = -1$, то $y = f(2x) = f(-1 \cdot 2) = f(-2) = 3$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (−1; 3).

Итак, на графике функции $y = f(x)$ есть точки (4; 7) и (−2; 3), а на графике функции $y = f(2x)$ есть точки (2; 7) и (−1; 3) (рис. 82), т. е. точки с той же ординатой, но с абсциссой в два раза меньшей (по модулю). Так же обстоит дело и с другими точками графика функции $y = f(x)$, когда мы переходим к графику функции $y = f(2x)$ (рис. 83). Такое преобразование обычно называют *сжатием к оси ординат с коэффициентом* 2.

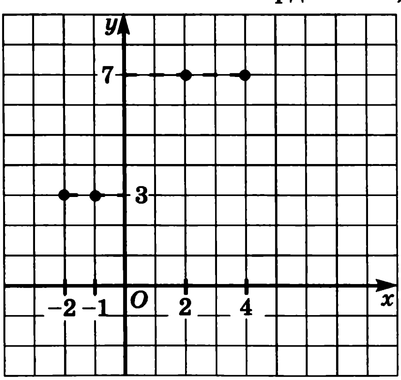


Рис. 82

Вообще график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия к оси y с коэффициентом k. Отметим, что при этом преобразовании остается на месте точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью y (если $x = 0$, то и $kx = 0$).

Впрочем, если $0 < k < 1$, то предпочитают говорить не о сжатии с коэффициентом k, а о растяжении от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Например, если $k = \frac{1}{3}$, то говорят не о сжатии с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о растяжении с коэффициентом 3.

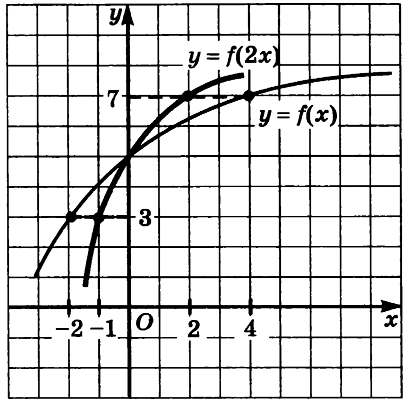


Рис. 83

Пример 2. Построить графики функций:

а) $y = \sin \frac{x}{2}$; б) $y = \cos 2x$.

Решение. а) Построим полуволну графика функции $y = \sin x$ (пунктирная линия на рис. 84) и осуществим ее растяжение от оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \sin \frac{x}{2}$ (рис. 84). Затем построим весь график (рис. 85; здесь масштаб уменьшенный).

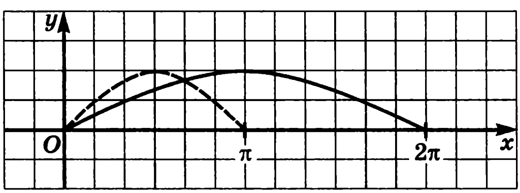


Рис. 84

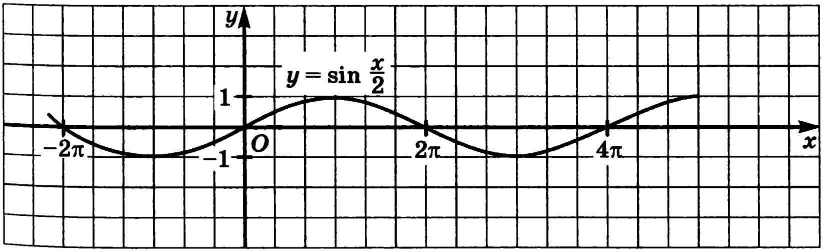


Рис. 85

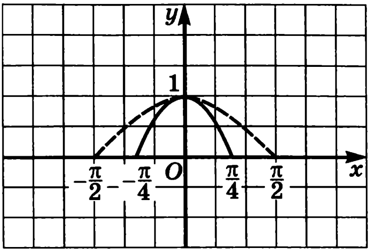


Рис. 86

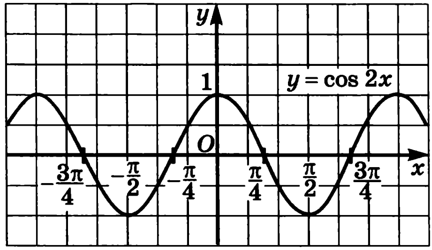


Рис. 87

б) Построим полуволну графика функции $y = \cos x$ (пунктирная линия на рис. 86) и осуществим ее сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \cos 2x$ (см. рис. 86). Затем построим весь график (см. рис. 87). ◁■

Задача 5. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где $k = -1$.

Р е ш е н и е. Речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$. Предположим, что на графике функции $y = f(x)$ есть точки (3; 5) и (−6; 1). Это значит, что $f(3) = 5$, а $f(-6) = 1$. Соответственно на графике функции $y = f(-x)$ имеется точка (−3; 5), так как при подстановке в формулу $y = f(-x)$ значения $x = -3$ получим: $y = f(3) = 5$. Аналогично убеждаемся, что графику функции $y = f(-x)$ принадлежит точка (6; 1).

Итак, точке (3; 5), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (−3; 5), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$, а точке (−6; 1), принадлежащей графику функции $y = f(-x)$, соответствует точка (6; 1), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$. Указанные пары точек симметричны относительно оси y (рис. 88).

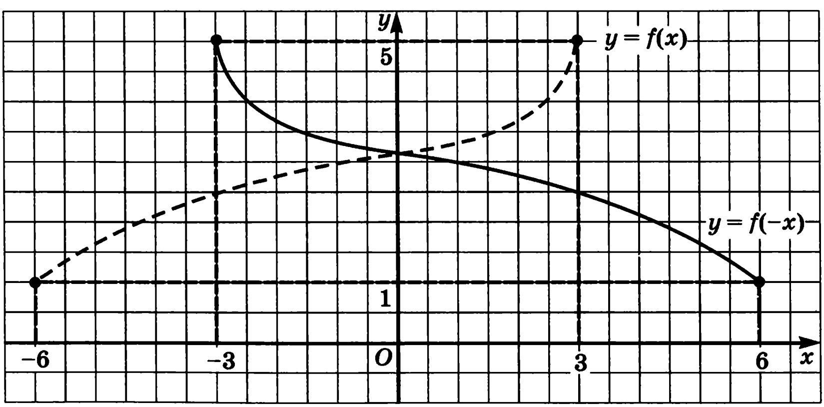


Рис. 88

Обобщая эти рассуждения, приходим к следующему выводу: *график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси y.*

Замечание. Если речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$, то обычно сначала проверяют, является ли функция $y = f(x)$ четной или нечетной. Если $y = f(x)$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то график функции $y = f(-x)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, т. е. $y = f(-x) = -f(x)$, то вместо графика функции $y = f(-x)$ можно построить график функции $y = -f(x)$.

Задача 6. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — отрицательное число.

Решение. При $k < 0$ справедливо равенство $f(kx) = f(-|k|x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = f(-|k|x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его сжатие к оси y с коэффициентом $|k|$;

3) сжатый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси y.

Пример 3. Построить график функции $y = -3\cos(-2x)$.

Решение. Прежде всего заметим, что $\cos(-2x) = \cos 2x$.

1) Построим график функции $y = \cos x$, точнее, одну полуволну графика (рис. 89). Все предварительные построения обозначены пунктирными линиями.

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции $y = 3\cos x$.

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 3\cos x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -3\cos x$.

4) Осуществим для полуволны графика функции $y = -3\cos x$

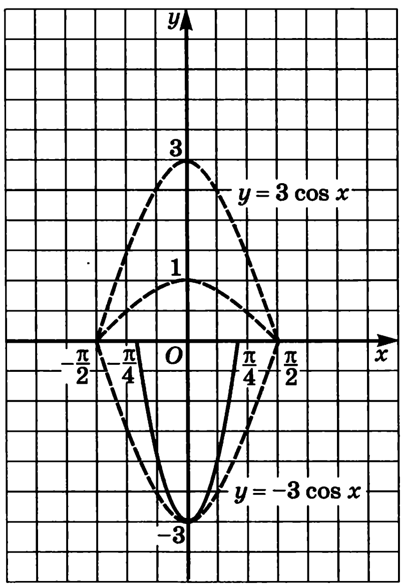


Рис. 89

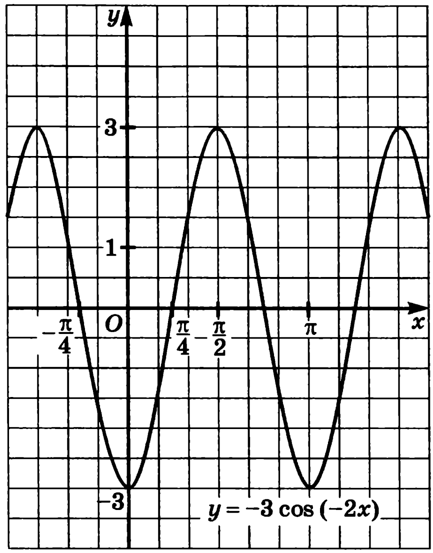


Рис. 90

сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции $y = -3\cos 2x$ (рис. 89, сплошная линия).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 90).

§ 14. Функции $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, их свойства и графики

Рассмотрим свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$, причем в первую очередь те, которые помогут составить представление о графике функции (большинство из этих свойств фактически известно из § 6). Когда такое представление сложится, начнем строить график, как обычно, по точкам.

Свойство 1. Область определения функции $y = \mathrm{tg}\, x$ — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Это свойство означает, что на графике функции $y = \mathrm{tg}\, x$ нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{5\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, и т. д. Эти прямые проведены пунктиром на рисунке 91.

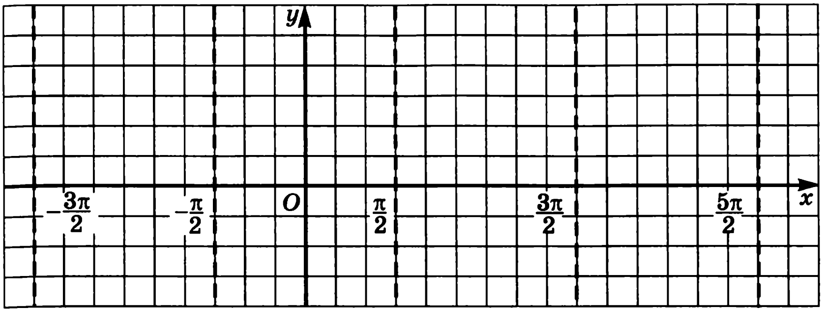


Рис. 91

Первое представление о графике получено: он состоит из бесконечного множества ветвей (в полосе между $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, в полосе между $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ и т. д.).

Свойство 2. $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом π.

То, что π — период, следует из двойного равенства

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi),$$

полученного в § 6. То, что π — основной период, наглядно иллюстрирует рисунок 91.

Значит, если мы построим ветвь графика в полосе от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси x вправо и влево на π, 2π, 3π и т. д. Тем самым получено второе представление о графике.

Свойство 3. $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная функция.

Это следует из доказанного в § 6 соотношения $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, достаточно построить часть графика на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем воспользоваться указанной симметрией.

Приступим к построению графика фукнции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем контрольные точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них плавную кривую (рис. 92). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 93). Воспользовавшись периодичностью, достроим график до конца (рис. 94).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*. Ту ее часть, которая изображена на рисунке 93, обычно называют *главной ветвью* тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит как бы под углом 45°. Почему это так, вы узнаете из § 28.

Отметим еще несколько свойств функции $y = \operatorname{tg} x$.

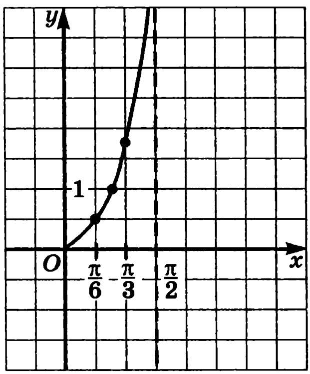


Рис. 92

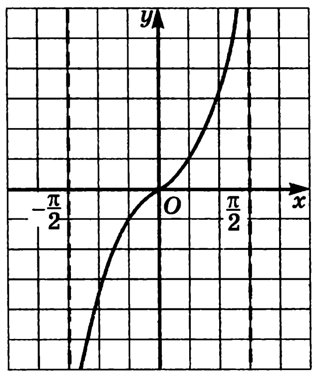


Рис. 93

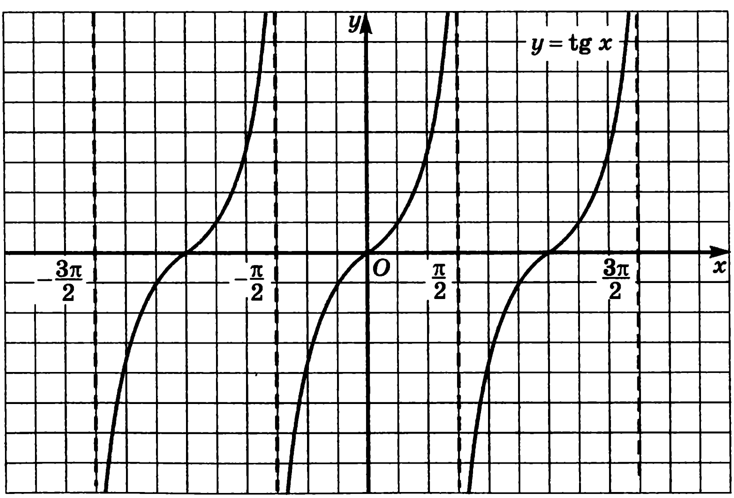


Рис. 94

Свойство 4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вообще функция возрастает на любом интервале вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); k \in \mathbf{Z}.$$

Свойство 5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена ни сверху, ни снизу (это свойство иллюстрирует линия тангенсов, см. с. 54).

Свойство 6. У функции $y = \operatorname{tg} x$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Свойство 7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вообще функция непрерывна на любом интервале вида

$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ функция претерпевает разрыв. Каждая прямая вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ служит вертикальной асимптотой графика функции.

Свойство 8. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Рассуждая аналогично, можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 95). График функции $y = \operatorname{ctg} x$, как и график функции

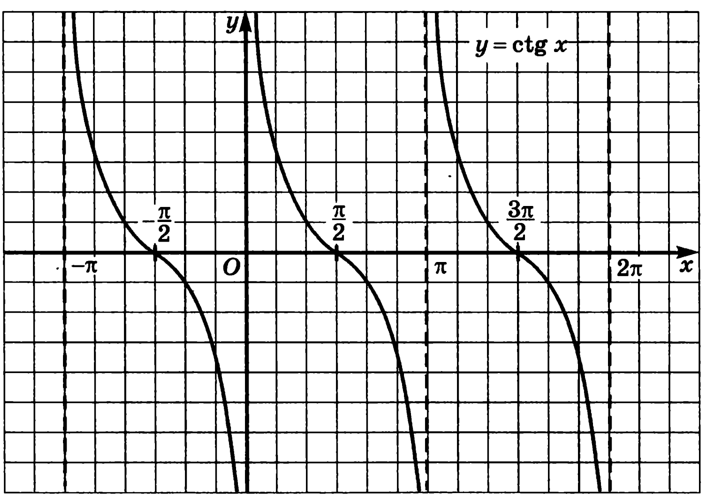


Рис. 95

$y = \operatorname{tg} x$, называют *тангенсоидой*. *Главной ветвью* графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ обычно называют ветвь, заключенную в полосе от $x = 0$ до $x = \pi$.

Пример. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Выше мы уже решили это уравнение — с помощью линии тангенсов (см. пример 10а в § 6). Сейчас мы решим это уравнение графически. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ — тангенсоиду и $y = \sqrt{3}$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 96), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πk. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{\pi}{3}$ (мы воспользовались тем, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$), это один корень уравнения, а все решения описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

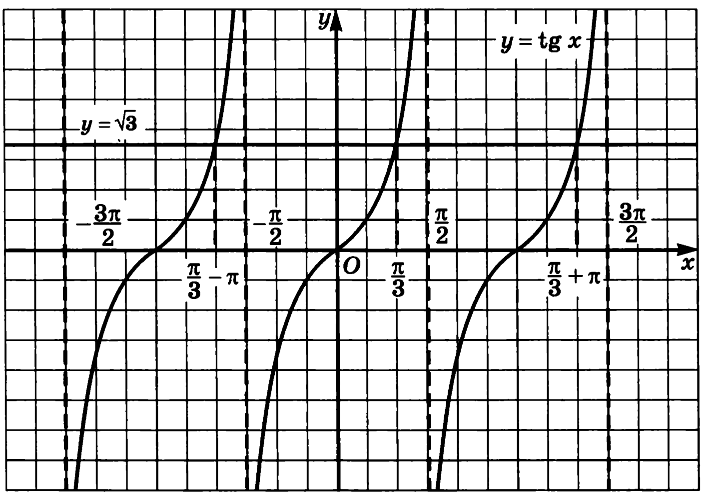


Рис. 96

ГЛАВА 3 Тригонометрические уравнения

§ 15. Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$

В главе 2 мы уже решали некоторые уравнения вида $\cos t = a$. Например, для уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$ с помощью числовой окружности (рис. 97) находим: $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, а для уравнения $\cos t = 1$ получаем (рис. 98): $t = 2\pi k$ (где, напомним, $k \in \mathbf{Z}$).

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = \frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности получаем (рис. 99):

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$.

Но что это за число t_1, пока неизвестно, ясно только то, что $t_1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Столкнувшись с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\arccos \frac{2}{5}$,

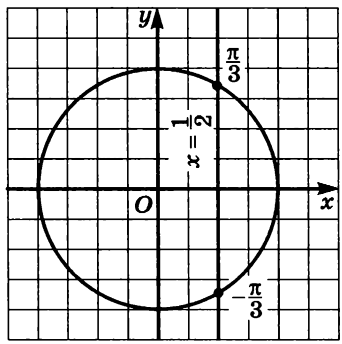


Рис. 97

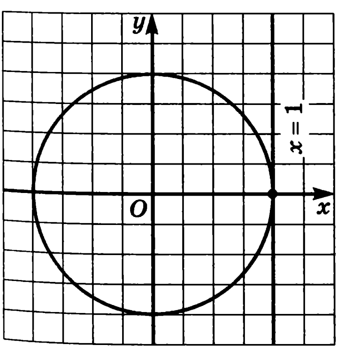


Рис. 98

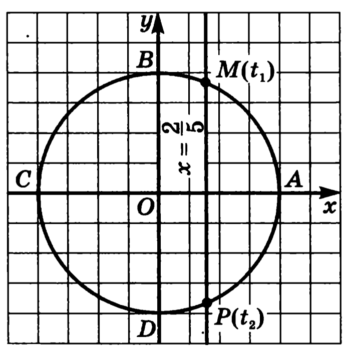


Рис. 99

который читается: *арккосинус двух пятых* (*arcus* в переводе с латинского значит *дуга*, сравните со словом *арка*), и с помощью этого символа таинственные корни t_1 и t_2 уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ записали так:

$$t_1 = \arccos\frac{2}{5}, \quad t_2 = -\arccos\frac{2}{5}.$$

Теперь все корни уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, \quad t = -\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k$$

или, обобщая, одной формулой:

$$t = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Что же такое $\arccos\frac{2}{5}$? Это число (длина дуги AM), косинус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Замечание. Символ $\arccos\frac{2}{5}$ состоит как бы из трех частей: содержит новый математический знак (arc), напоминание об исходной функции ($\cos t$) и, наконец, напоминание о правой части уравнения, в приведенном нами случае — о числе $\frac{2}{5}$.

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 100) получаем:

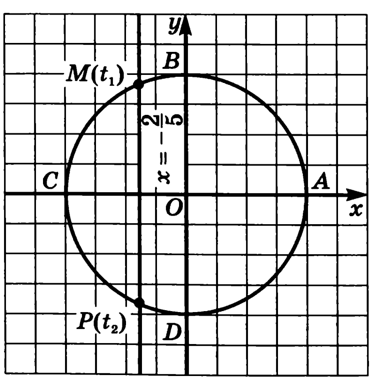


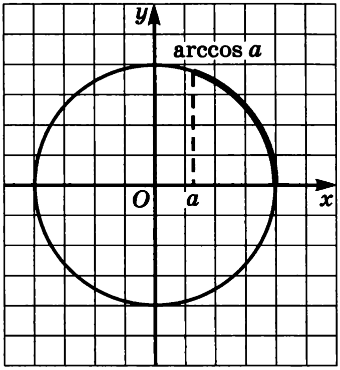
Рис. 100

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

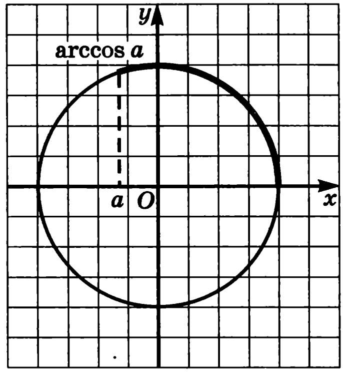
где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$. Число t_1 обозначают символом $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ и записывают все корни уравнения $\cos t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k,$$

$$t = -\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$



а



б

Рис. 101

Написанные две формулы можно объединить в одну:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Что же такое $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это число (длина дуги AM), косинус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Сформулируем определение арккосинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то **arccos a (арккосинус a)** — это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a (рис. 101).

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то}\\ \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\cos t = a,\\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.\end{cases}\end{gathered}}$$

В приведенной выше записи символ $\Leftrightarrow$ можно прочитать так: «это значит, что».

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\cos t = a$:

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет решения

$$\boxed{t = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\cos t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k$;

если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k$.

Пример 1. Вычислить:

а) $\arccos \frac{1}{2}$;   в) $\arccos 0$;

б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;   г) $\arccos 1$.

Решение. а) Пусть $\arccos \frac{1}{2} = t$. Тогда $\cos t = \frac{1}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

б) Пусть $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{3\pi}{4}$, поскольку $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\arccos 0 = t$. Тогда $\cos t = 0$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

г) Пусть $\arccos 1 = t$. Тогда $\cos t = 1$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$ и $0 \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 1 = 0$. ◄■

Теорема. **Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство**

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi.$$

Доказательство. Будем считать для определенности, что $a > 0$. Отметим $\arccos a$ на числовой окружности — это длина дуги AM; $\arccos(-a)$ — длина дуги AP (рис. 102). Дуги AM и PC симметричны относительно вертикального диаметра окружности, значит, эти дуги равны по длине. Получаем:

$$\arccos a + \arccos(-a) = AM + AP = \\ = PC + AP = AC = \pi. \quad \bullet$$

На практике полученное соотношение удобнее использовать в следующем виде:

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } 0 < a < 1.}$$

При этом учитывают, что в случае, когда $a > 0$, число $\arccos a$ принадлежит интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Такой же результат был получен выше при решении примера 1б.

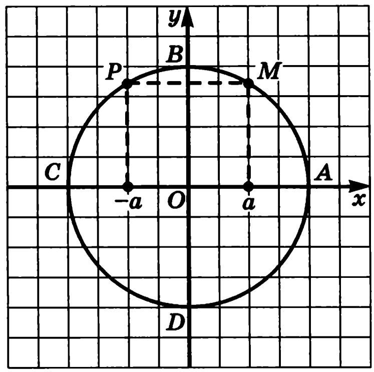


Рис. 102

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = \frac{2}{7}$;

б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos t = -1{,}2$.

Решение. а) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

б) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

в) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\frac{2}{7} + 2\pi k.$$

Вычислить значение арккосинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $-1,2 < -1$, то уравнение $\cos t = -1,2$ не имеет решений. ◁■

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos t > 0,3.$$

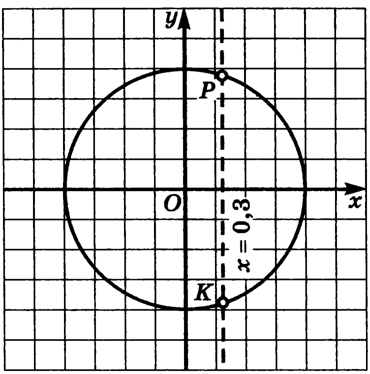


Рис. 103

Решение. Учтем, что $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $x > 0,3$. Прямая $x = 0,3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 103). Неравенству $x > 0,3$ соответствуют точки открытой дуги KP. Главные имена точек K и P в этом случае — соответственно $-\arccos 0,3$ и $\arccos 0,3$. Значит, аналитическая запись дуги KP имеет вид

$$-\arccos 0,3 + 2\pi k < t < \arccos 0,3 + 2\pi k.$$ ◁■

§ 16. Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$

Рассмотрим уравнение $\sin t = \frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 104) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а t_2 — длина дуги AP. Поскольку $AP = AC - PC$, $AC = \pi$, а $PC = AM$, получаем, что $t_2 = \pi - t_1$.

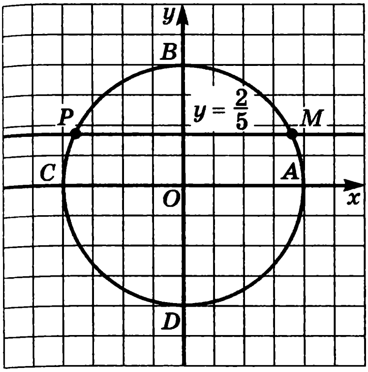


Рис. 104

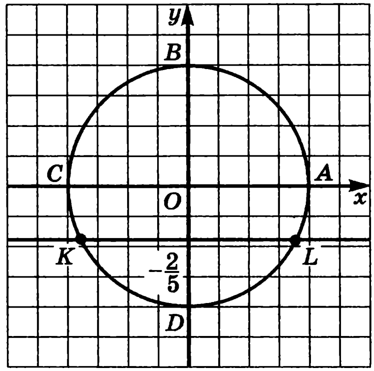


Рис. 105

Математики ввели для числа t_1 символ $\arcsin\frac{2}{5}$, который читается *арксинус двух пятых*. С его помощью все корни уравнения $\sin t = \frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arcsin\frac{2}{5} + 2\pi k,$$

$$t = \pi - \arcsin\frac{2}{5} + 2\pi k.$$

Что же такое $\arcsin\frac{2}{5}$? Это число (длина дуги AM), синус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь рассмотрим уравнение $\sin t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 105) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги LA, взятая со знаком минус, t_2 — длина дуги AK. Математики обозначили число t_1 символом $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$ и сразу обратили внимание на два обстоятельства.

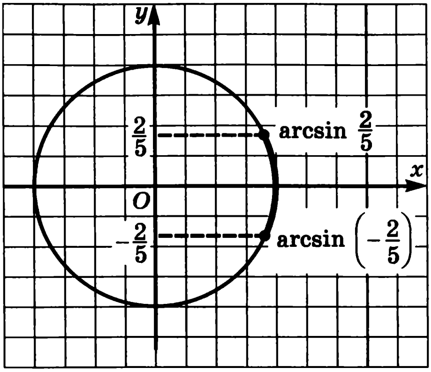


Рис. 106

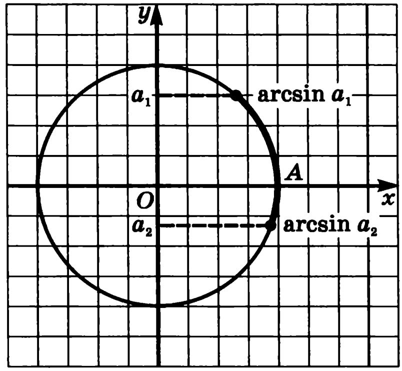


Рис. 107

Первое: дуги AM и AL (см. рис. 104 и 105) равны по длине и противоположны по направлению. Значит,

$$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5} \text{ (рис. 106).}$$

Второе:

$$AK = AC + CK = AC + LA =$$
$$= AC - AL = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right).$$

Значит, и в этом случае получается, что $t_2 = \pi - t_1$. Это дает возможность записать все решения уравнения $\sin t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Что же такое $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это — число, синус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Сформулируем определение арксинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то **$\arcsin a$ (арксинус a)** — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a (рис. 107).

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\textbf{если } |a| \leqslant 1, \textbf{ то}\\ \arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\sin t = a,\\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.\end{cases}\end{gathered}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\sin t = a$:

Если** $|a| \leqslant 1$, **то уравнение** $\sin t = a$ **имеет две серии решений:

$$\boxed{t = \arcsin a + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k; \; k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k$;

если $\sin t = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

если $\sin t = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 1. Вычислить:

а) $\arcsin \frac{1}{2}$; в) $\arcsin 0$;

б) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arcsin 1$.

Решение. а) Пусть $\arcsin \frac{1}{2} = t$. Тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Пусть $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

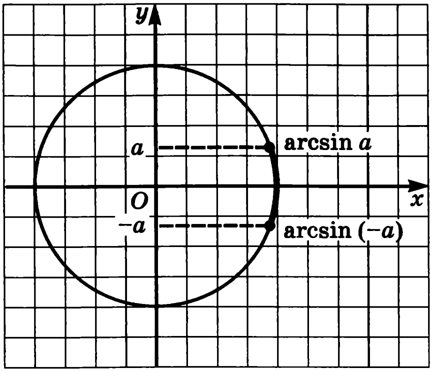


Рис. 108

в) Пусть $\arcsin 0 = t$. Тогда $\sin t = 0$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\sin 0 = 0$ и $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 0 = 0$.

г) Пусть $\arcsin 1 = t$. Тогда $\sin t = 1$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. ◀■

Выше мы отметили, что

$$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5}.$$

Вообще для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула (рис. 108):

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a.}$$

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$;   в) $\sin t = \frac{2}{7}$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;   г) $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. а) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

б) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k;$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, \quad \text{т. е.} \quad t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k.$$

в) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\frac{2}{7} + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\frac{2}{7} + 2\pi k.$$

Вычислить значение арксинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, то уравнение $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ не имеет решений. ◁■

Пример 3. Решить неравенство $\sin t \leqslant 0{,}3$.

Решение. а) Учтем, что $\sin t$ — ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $y \leqslant 0{,}3$. Прямая $y = 0{,}3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 109). Неравенству $y \leqslant 0{,}3$ соответствуют точки дуги PK (рис. 109). Главные имена точек P и K в этом случае $-\pi - \arcsin 0{,}3$ и $\arcsin 0{,}3$ соответственно. Значит, решение неравенства имеет вид

$$-\pi - \arcsin 0{,}3 + 2\pi k \leqslant t \leqslant \arcsin 0{,}3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$ ◁■

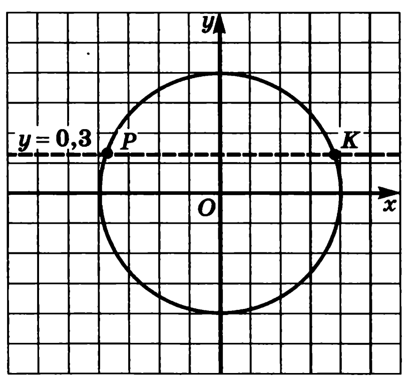


Рис. 109

Выше были получены две формулы для решения уравнения $\sin t = a$:

$$t = \arcsin a + 2\pi k;$$
$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k.$$

Их можно объединить одной формулой. Перепишем эти формулы следующим образом:

$$t = \arcsin a + \pi \cdot 2k,$$

$$t = -\arcsin a + \pi(2k + 1).$$

Замечаем, что если перед $\arcsin a$ стоит знак +, то у числа π множителем является четное число $2k$ (см. первую строку); если же перед $\arcsin a$ стоит знак −, то у числа π множителем является нечетное число $2k + 1$ (см. вторую строку). Это наблюдение позволяет записать общую формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$\boxed{t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.}$$

Почему эта формула общая? Смотрите: при четном n ($n = 2k$) из нее получается первая из написанных выше формул, а при нечетном n ($n = 2k + 1$) — вторая из написанных выше формул.

С помощью полученной общей формулы можно по-другому записать решения уравнений из примера 2. Так, для уравнения $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем: $t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$. Для уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем: $t = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$. Это выражение можно записать иначе, выполнив следующие преобразования:

$$(-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^n(-1)\,\frac{\pi}{3} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}.$$

В итоге получаем: $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$.

Для рассмотренного в примере 2в уравнения $\sin t = \frac{2}{7}$ ответ можно записать так: $t = (-1)^n \arcsin \frac{2}{7} + \pi n$.

Важное замечание. Итак, мы получили формулы корней для уравнений $\cos t = a$ и $\sin t = a$: соответственно $t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ (где $|a| \leqslant 1$). Переменную мы пока обозначали буквой t для удобства читателя, подчеркивая тем самым, что вся информация получена с помощью числовой окружности. Но когда имеется готовая формула, переменная может быть обозначена любой буквой, в том числе более традиционной для уравнений буквой x. Так мы чаще всего и будем поступать в дальнейшем при решении тригонометрических уравнений.

§ 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где x_1 — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 110). Для числа x_1 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg} 2$ (читается: *арктангенс двух*). Все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ можно описать формулой $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$.

Что же такое $\operatorname{arctg} 2$? Это число, тангенс которого равен 2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим теперь уравнение $\operatorname{tg} x = -2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где x_2 — абсцисса точки пересечения прямой $y = -2$ с главной ветвью тангенсоиды. Для числа x_2 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg}(-2)$. Все корни уравнения можно описать формулой $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k$.

Что же такое $\operatorname{arctg}(-2)$? Это число, тангенс которого равен -2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Обратите внимание на то, что $x_2 = -x_1$ (рис. 110). Это значит, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$.

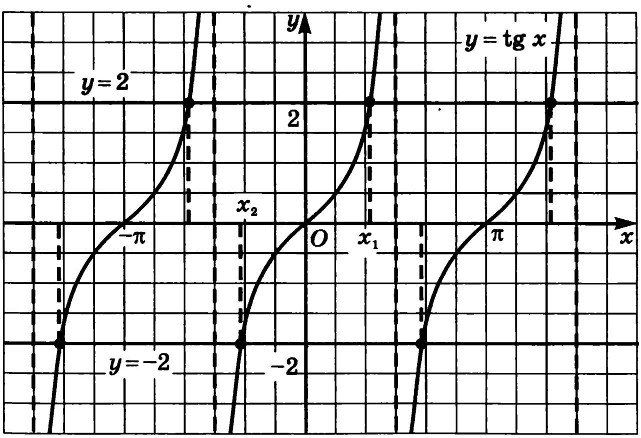


Рис. 110

Сформулируем определение арктангенса в общем виде.

Определение 1. **arctg** a **(арктангенс** a**)** — это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\operatorname{tg} x = a$: ***уравнение*** $\operatorname{tg} x = a$ ***имеет решения***

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z.}$$

Выше мы отметили, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$. Вообще для любого значения a справедлива формула

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.}$$

Пример 1. Вычислить:

а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $\operatorname{arctg} 0$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 1$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = -\frac{\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Можно было рассуждать и по-другому:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

в) Пусть $\operatorname{arctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 0$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = 0$, поскольку $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 0 = 0$. ◁■

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -1{,}2$.

Решение. а) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

б) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k.$$

в) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}(-1{,}2) + \pi k$.

Вычислить значение арктангенса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде. ◁■

Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, где $a > 0$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 111). Значит, $\operatorname{arcctg} a$ — это число, котангенс которого равен a и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$ — на этом интервале строится главная ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

На рисунке 111 представлена графическая иллюстрация решения уравнения $\operatorname{ctg} x = -a$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где $x_2 = \operatorname{arcctg}(-a)$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = -a$ с главной ветвью тангенсоиды. Значит, $\operatorname{arcctg}(-a)$ — это число, котангенс которого равен $-a$ и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$.

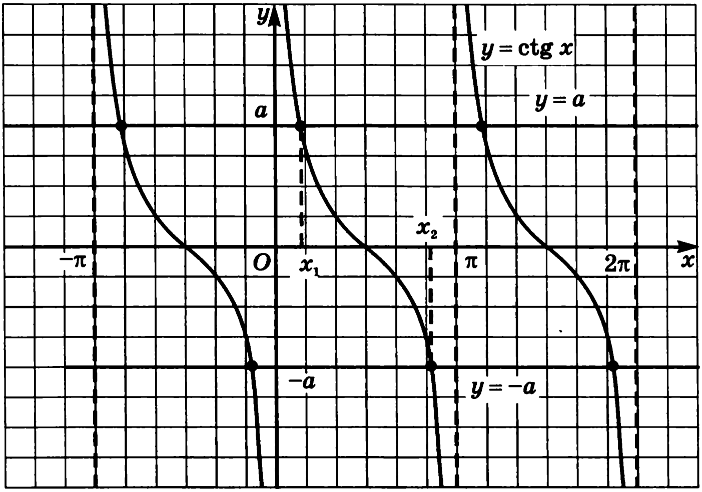


Рис. 111

Определение 2. **arcctg a (арккотангенс a)** — это такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\operatorname{ctg} x = a$: ***уравнение*** $\operatorname{ctg} x = a$ ***имеет решения***

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z.}$$

Обратите внимание на то, что $x_2 = \pi - x_1$ (рис. 111). Это значит, что

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.}$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\operatorname{arcctg} 1$; б) $\operatorname{arcctg}(-1)$; в) $\operatorname{arcctg} 0$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arcctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 1$ и $x \in (0; \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Итак, $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\operatorname{arcctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 0$ и $x \in (0; \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in (0; \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. ◁■

Замечание. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ практически всегда можно преобразовать к виду $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$. Исключение составляет уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$. Но в этом случае, воспользовавшись тем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, можно перейти к уравнению $\cos x = 0$. Таким образом, уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$ самостоятельного интереса не представляет.

§ 18. Тригонометрические уравнения

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся *простейшие тригонометрические уравнения*, т. е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число. К настоящему моменту мы знаем, что:

1) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;$$

2) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\sin x = a$ имеют вид

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

или, что то же самое,

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi k;$$

3) если $|a| > 1$, то уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$ не имеют решений;

4) решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для любого значения a имеют вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

5) следует выделить частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения ($n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$).

К простейшим относят и уравнения вида $T(kx + m) = a$, где T — знак какой-либо тригонометрической функции.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$;   б) $\cos \frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;   в) $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. а) Введем новую переменную $t = 2x$. Тогда заданное уравнение примет вид $\sin t = \frac{1}{2}$, откуда получаем:

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n.$$

Далее, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, значит, $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Возвращаясь к переменной x, получаем: $2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. Осталось обе части этого равенства разделить почленно на 2:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Заметим, что при наличии некоторого опыта можно не вводить промежуточную переменную $t = 2x$, а сразу переходить от уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$ к записи $2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$. Именно так мы и будем действовать в дальнейшем.

б) Решения уравнения $\cos t = a$ имеют вид $t = \pm\arccos a + 2\pi n$. Для данного примера это означает, что $\frac{2}{3}x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$.

Вычислим $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, воспользовавшись соответствующей формулой для арккосинуса (см. § 15):

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Значит, $\frac{2}{3}x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, откуда находим, что

$$x = \pm\frac{9\pi}{8} + 3\pi n.$$

в) Решения уравнения $\operatorname{tg} t = a$ имеют вид $t = \operatorname{arctg} a + \pi n$. Для данного примера это означает, что $4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$. Вычислив $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, получим $\frac{\pi}{6}$. Далее последовательно получаем:

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. Найти те корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде: $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ (см. пример 1а). Далее придадим параметру n последовательно значения 0, 1, 2, ..., −1, −2, ... и подставим эти значения в общую формулу корней.

Если $n = 0$, то $x = (-1)^0\frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 1$, то $x = (-1)^1\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 2$, то $x = (-1)^2\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$. Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = 3, 4, \ldots$.

Пусть теперь $n = -1$. Тогда

$$x = (-1)^{-1}\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}.$$

Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \ldots$.

Итак, заданному отрезку $[0; \pi]$ принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n: $n = 0$, $n = 1$. Эти корни таковы: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$. ◁■

2. Два основных метода решения тригонометрических уравнений

В пункте 1 мы говорили лишь о простейших тригонометрических уравнениях вида $T(kx + m) = a$, где T — символ одной из тригонометрических функций. В более сложных случаях применяют метод введения новой переменной и метод разложения на множители.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$; б) $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$.

Решение. а) Введем новую переменную: $z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго находим:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n;\ x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

б) Воспользуемся тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0.$$

После понятных преобразований получим:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную: $z = \cos x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - z - 1 = 0$, откуда находим: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\cos x = 1$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$. Из первого уравнения находим: $x = 2\pi n$; из второго уравнения находим:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: а) $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $x = 2\pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Теперь поговорим о втором методе решения тригонометрических уравнений — *методе разложения на множители*. Смысл этого метода вам знаком: если уравнение $f(x) = 0$ удается преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то либо $f_1(x) = 0$, либо $f_2(x) = 0$. В подобных случаях обычно говорят так: *задача сводится к решению совокупности уравнений*:

$$f_1(x) = 0; \quad f_2(x) = 0.$$

Пример 4. Решить уравнение $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$

Решение. Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n.$$

Пример 5. Решить уравнение $2 \sin \frac{x}{2} \cos 5x - \cos 5x = 0.$

Решение. Имеем: $\cos 5x\left(2 \sin \frac{x}{2} - 1\right) = 0$. Значит, приходим к совокупности уравнений

$$\cos 5x = 0; \quad \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Из второго уравнения находим: $\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Учтите, что переход от уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ к совокупности уравнений $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$ не всегда безопасен. Рассмотрим, например, уравнение $\operatorname{tg} x\,(\sin x - 1) = 0$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ находим: $x = \pi n$; из уравнения $\sin x = 1$ находим: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Но включить обе серии решений в ответ нельзя. Дело в том, что при значениях $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ входящий в заданное уравнение множитель $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения (области допустимых значений переменной — ОДЗ), это посторонние корни.

3. Однородные тригонометрические уравнения

Здесь мы познакомимся с довольно часто встречающимися на практике тригонометрическими уравнениями специального вида.

Определение. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **первой степени**; уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **второй степени.**

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента a и b отличны от нуля; ведь если, например, $a = 0$, уравнение принимает вид $b\cos x = 0$ и отдельного обсуждения не заслуживает. Аналогично при $b = 0$ получаем: $a\sin x = 0$, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение $a\sin x + b\cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x};$$

$$a\operatorname{tg} x + b = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обратите внимание, что делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение не обращается в нуль (на 0 делить нельзя). Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае $\cos x$ отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда однородное уравнение $a\sin x + b\cos x = 0$ примет вид $a\sin x = 0$, т. е. $\sin x = 0$ (вы ведь не забыли, что коэффициент a отличен от нуля). Получается, что и $\cos x = 0$, и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в р а з л и ч н ы х точках. Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на $\cos x$ — вполне благополучная операция, не приводящая к потере решений.

Уравнения вида $a\sin mx + b\cos mx = 0$ тоже называют однородными тригонометрическими уравнениями первой степени. Для их решения обе части уравнения делят почленно на $\cos mx$.

Пример 6. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0;\quad \mathrm{tg}\, x = \frac{3}{2};\quad x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n.$$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n$.

Пример 7. Решить уравнение $\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Мы знаем, что $\cos(-t) = \cos t$, значит,

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

По формулам приведения (см. § 9) имеем:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos 2x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в более простом виде: $\cos 2x = \sin 2x$, т. е. $\sin 2x - \cos 2x = 0$.

Разделим обе части уравнения почленно на $\cos 2x$:

$$\mathrm{tg}\, 2x - 1 = 0;$$

$$\mathrm{tg}\, 2x = 1;$$

$$2x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi n;$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Если коэффициент a отличен от нуля, т. е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, легко убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$

$$\text{т. е. } a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\, x + c = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

коэффициент a равен 0, т. е. отсутствует член $a \sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x\,(b \sin x + c \cos x) = 0;$$
$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad b \sin x + c \cos x = 0.$$

Получились два уравнения, которые мы решать умеем.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c = 0$, т. е. когда однородное уравнение имеет вид $a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали алгоритм решения однородного уравнения второй степени.

Алгоритм решения уравнения
$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.
2. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т. е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.
3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида

$$a \sin^2 mx + b \sin mx \cos mx + c \cos^2 mx = 0.$$

Пример 8. Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} x$, получим:

$$z^2 - 3z + 2 = 0;$$
$$z_1 = 1,\ z_2 = 2.$$

Значит, либо $\operatorname{tg} x = 1$, либо $\operatorname{tg} x = 2$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ находим:

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ находим: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Здесь отсутствует член вида $a \sin^2 x$, значит, делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя. Решим уравнение методом разложения на множители:

$$\cos x\left(\sqrt{3} \sin x + \cos x\right) = 0;$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Второе уравнение — однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решим его с помощью почленного деления обеих частей уравнения на $\cos x$:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0;$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$.

В заключение рассмотрим более сложный пример.

Пример 10. Решить уравнение

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2.$$

Решение. Чем это уравнение сложнее предыдущих? Во-первых, оно не является однородным, так как в правой его части содержится не 0, а 2. Во-вторых, в левой части уравнения под знаками синуса и косинуса находится не x, а $3x$.

С числом 2, содержащимся в правой части уравнения, поступим следующим образом. Известно, что $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ — это тождество верно для любого t. В частности, $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$. Но тогда $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$. Заменив в правой части уравнения 2 на $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x$, получим:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x;$$

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0;$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0.$$

Как видите, удалось преобразовать заданное уравнение в однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Оно содержит в своем составе член $\sin^2 3x$, значит, применим способ почленного деления на $\cos^2 3x$:

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 3x + 3 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} 3x$, получим квадратное уравнение

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0.$$

Для решения этого уравнения можно использовать формулу корней квадратного уравнения, но изящнее сделать так: заметив, что

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = \left(z - \sqrt{3}\right)^2,$$

преобразовать квадратное уравнение к виду $\left(z - \sqrt{3}\right)^2 = 0$, откуда находим, что $z = \sqrt{3}$.

Итак,

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3};$$

$$3x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n;$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

ГЛАВА 4 Преобразование тригонометрических выражений

§ 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов

В этой главе речь пойдет о преобразовании тригонометрических выражений. Для этого используются различные тригонометрические формулы. Пожалуй, самыми важными являются следующие две формулы (доказательство технически довольно сложно, и мы его здесь не приводим):

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,\\&\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.\end{aligned}}$$

Эти формулы обычно называют *синус суммы* и *косинус суммы*. А считаются они самыми важными потому, что, как мы увидим далее, из этих формул без особого труда выводятся практически все формулы тригонометрии.

Рассмотрим выражение $\sin(x-y)$. Если переписать его в виде $\sin(x+(-y))$, то появляется возможность применить формулу синуса суммы для аргументов x и $-y$:

$$\sin(x+(-y))=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y). \qquad (1)$$

А теперь воспользуемся тем, что

$$\cos(-y)=\cos y, \quad \sin(-y)=-\sin y.$$

Это позволит правую часть равенства (1) переписать в виде

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Таким образом, получилась формула *синуса разности*:

$$\boxed{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.}$$

Аналогичные рассуждения позволяют вывести формулу *косинуса разности*:

$$\cos(x-y)=\cos(x+(-y))=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)=$$
$$=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Итак,

$$\boxed{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.}$$

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$ и $\cos 75°$.

Решение. Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$, и тем, что значения синуса и косинуса углов $45°$ и $30°$ известны:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Имеем:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Доказать, что

а) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;

б) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Решение.

а) $\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \sin x = -\sin x$;

б) $\cos(\pi + x) = \cos \pi \cos x - \sin \pi \sin x = (-1) \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = -\cos x$;

в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin\dfrac{\pi}{2}\cos x - \cos\dfrac{\pi}{2}\sin x = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x$;

г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$. ◁■

Замечание. Это известные вам формулы приведения (см. § 9). Все формулы приведения для синуса и косинуса без труда выводятся с помощью формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов.

Пример 3. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если $x = 255°$.

Решение. $\sin 255° = \sin(180° + 75°) = -\sin 75°$;

$$\cos 255° = \cos(180° + 75°) = -\cos 75°.$$

В примере 1 мы установили, что

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Значит,

$$\sin 255^\circ = -\sin 75^\circ = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 255^\circ = -\cos 75^\circ = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 4. Известно, что

$$\sin x = \frac{3}{5}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \quad \pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Вычислить: а) $\sin(x + y)$; б) $x + y$.

Решение. а) Воспользуемся формулой синуса суммы:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \qquad (2)$$

Значения $\sin x$ и $\cos y$ заданы, нужно вычислить значения $\cos x$ и $\sin y$.

Имеем: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. По условию аргумент x принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из равенства $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos x = \frac{4}{5}$.

Имеем: $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. По условию аргумент y принадлежит третьей четверти, а в ней синус отрицателен. Поэтому из равенства $\sin^2 y = \frac{16}{25}$ находим, что $\sin y = -\frac{4}{5}$.

Подставим заданные и найденные значения в правую часть формулы (2):

$$\sin(x + y) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1.$$

б) В условии сказано, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$.

Сложив эти два двойных неравенства, получим:

$$\pi < x + y < 2\pi.$$

Итак, $\sin(x + y) = -1$ и $\pi < x + y < 2\pi$. Значит, $x + y = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) -1; б) $\frac{3\pi}{2}$.

Пример 5. Вычислить:

а) $\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}$;

б) $\cos 37°\cos 8° - \sin 37°\sin 8°$;

в) $\sin 44°\cos 14° - \sin 46°\cos 76°$.

Решение. а) Заданное выражение можно «свернуть» в синус суммы аргументов $\frac{4\pi}{15}$ и $\frac{\pi}{15}$:

$$\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}=\sin\left(\frac{4\pi}{15}+\frac{\pi}{15}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Заданное выражение можно «свернуть» в косинус суммы аргументов 37° и 8°:

$$\cos 37°\cos 8° - \sin 37°\sin 8° = \cos(37° + 8°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

в) По формулам приведения находим:

$$\sin 46° = \sin(90° - 44°) = \cos 44°;$$
$$\cos 76° = \cos(90° - 14°) = \sin 14°.$$

Это значит, что в заданном выражении можно заменить $\sin 46°$ на $\cos 44°$, а $\cos 76°$ на $\sin 14°$. Тогда заданное выражение примет вид

$$\sin 44°\cdot\cos 14° - \cos 44°\cdot\sin 14°.$$

Это синус разности аргументов 44° и 14°:

$$\sin 44°\cdot\cos 14° - \cos 44°\cdot\sin 14° = \sin(44° - 14°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$.

Пример 6. а) Упростить выражение $\sqrt{3}\cos x - \sin x$;

б) решить уравнение $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Решение. а) Если переписать заданное выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$ и вспомнить, что $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то можно увидеть, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы косинуса суммы для аргументов $\frac{\pi}{6}$ и x:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

б) В пункте а) мы получили, что

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1.$$

Решая это уравнение, последовательно получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Учтем, что $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$. Это позволит записать решение уравнения не в виде одной, а в виде двух серий, но зато они выглядят понятнее: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$; б) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

Решение.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) +$$

$$+ \left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x - \frac{1}{2}\cdot\sin x +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{2}\cdot\sin x = \sqrt{3}\cos x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде $\sqrt{3}\cos x =$ $= \sqrt{3}$, т. е. $\cos x = 1$, откуда получаем: $x = 2\pi n$.

Ответ: $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

§ 20. Тангенс суммы и разности аргументов

В § 19 мы получили формулы, выражающие синус и косинус суммы и разности аргументов через синусы и косинусы аргументов. В этом параграфе речь пойдет о том, как тангенс суммы или разности аргументов выражается через тангенсы аргументов. Соответствующие формулы выглядят следующим образом:

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.}$$

При этом, разумеется, предполагается, что все тангенсы имеют смысл, т. е. что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для первой формулы), $x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для второй формулы).

Доказательства этих формул достаточно сложны, мы приведем одно из них в конце параграфа. Но сначала рассмотрим ряд примеров, показывающих, как использовать эти формулы на практике.

Пример 1. Вычислить:

а) $\operatorname{tg} 75°$; б) $\operatorname{tg} 15°$; в) $\dfrac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°}$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$. Получим:

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

Есть смысл избавиться от иррациональности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель полученной дроби на $3 + \sqrt{3}$:

$$\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{6(2+\sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$.

б) Можно воспользоваться тем, что $15° = 45° - 30°$, и далее рассуждать так же, как в пукте а) (сделайте это!). Но мы поступим по-другому:

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(90° - 75°) = \operatorname{ctg} 75°;$$

$$\operatorname{ctg} 75° = \frac{1}{\operatorname{tg} 75°}.$$

В пункте а) мы установили, что $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$. Значит,

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{1}{\operatorname{tg} 75°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

в) Заметим, что заданное выражение представляет собой правую часть формулы тангенса суммы для аргументов 27° и 18°. Значит,

$$\frac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°} = \operatorname{tg}(27° + 18°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Ответ: а) $2 + \sqrt{3}$; б) $2 - \sqrt{3}$; в) 1.

Пример 2. Доказать тождество $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Решение. Применим к правой части проверяемого тождества формулу тангенса разности:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

З а м е ч а н и е. Когда речь идет о доказательстве тождества или о преобразовании выражения, всегда предполагается, что переменные принимают только допустимые значения. Так, в рассмотренном примере доказанное тождество справедливо при следующих условиях: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, если известно, что

$$\cos x = -\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся тождеством, полученным в предыдущем примере:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}. \tag{1}$$

Если мы вычислим $\operatorname{tg} x$, то вычислим и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Значение $\cos x$ задано, значение $\operatorname{tg} x$ найдем с помощью соотношения $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Получим:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$

По условию аргумент x принадлежит второй четверти, а в ней тангенс отрицателен. Поэтому из равенства $\operatorname{tg}^2 x = \frac{16}{9}$ находим: $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$.

Подставим найденное значение $\operatorname{tg} x$ в правую часть формулы (1):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}} = \frac{7}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -7.$$

В заключение, как было обещано, докажем формулу тангенса суммы. Имеем:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Разделим в полученной дроби числитель и знаменатель почленно на $\cos x \cos y$ (это возможно, поскольку $\cos x \cos y \neq 0$ при допустимых значениях x, y):

$$\frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Итак, $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, что и требовалось доказать.

§ 21. Формулы двойного аргумента

Здесь речь пойдет о формулах тригонометрии, позволяющих выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Эти формулы обычно называют *формулами двойного аргумента*. Название, может быть, не очень удачное, как, впрочем, и такие названия, как формулы приведения, синус суммы, косинус разности и т. д. Но это не суть важно: главное, что есть некий словесный символ, позволяющий понять, о чем идет речь.

Рассмотрим выражение $\sin 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\sin(x + x)$ формулу синуса суммы (см. § 19):

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

Итак,

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x.}$$

Рассмотрим выражение $\cos 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\cos(x + x)$ формулу косинуса суммы (см. § 19):

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Итак,

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$$

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg} 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\operatorname{tg}(x + x)$ формулу тангенса суммы (см. § 20):

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.}$$

Формулы синуса двойного аргумента и косинуса двойного аргумента справедливы для любых значений аргумента (никаких ограничений нет), тогда как формула тангенса двойного аргумента справедлива лишь для тех значений аргумента x, для которых определены $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$, а также отличен от нуля знаменатель дроби, т. е. $1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$.

Разумеется, все полученные формулы можно применять и в тех случаях, когда место аргумента x занимает более сложное выражение. Например, справедливы следующие соотношения:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x;$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\cos 48° = \cos^2 24° - \sin^2 24°;$$

$$\cos (2x + 6y) = \cos^2 (x + 3y) - \sin^2 (x + 3y);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 2t\right) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}.$$

И, как всегда, любую из трех полученных в этом параграфе формул двойного аргумента можно использовать как справа налево, так и слева направо.

Например, вместо $2 \sin 3x \cos 3x$ можно написать $\sin 6x$, вместо $\cos^2 2{,}5t - \sin^2 2{,}5t$ можно написать $\cos 5t$.

Пример 1. Доказать тождества:

а) $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

б) $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента. Получим:

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2.$$

б) $1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2$. ◀

Пример 2. Сократить дробь $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$.

Решение. В числителе дроби воспользуемся доказанным в примере 1 тождеством, а в знаменателе — формулой косинуса двойного аргумента:

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)} = \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$; б) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Решение. а) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента. Заметив это, получим:

$$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его, получим:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) = 0{,}5\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 0{,}5\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,25.

Пример 4. Зная, что $\cos x = \dfrac{3}{5}$ и $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, вычислить:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$.

Решение. а) $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$.

Теперь нетрудно вычислить $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2-\frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

б) Для вычисления $\sin 2x$ воспользуемся формулой

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Значение $\cos x$ дано в условии, а значение $\sin x$ найдем следующим образом. Во-первых, мы уже знаем, что $\sin^2 x = \frac{16}{25}$. Это значит, что $\sin x = \frac{4}{5}$ или $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Во-вторых, по условию аргумент x принадлежит четвертой четверти, а в ней синус отрицателен. Это значит, что $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Теперь нетрудно вычислить $\sin 2x$:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

в) $\operatorname{tg} 2x$ вычислим, воспользовавшись определением тангенса:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}.$$

Ответ: а) $-\frac{7}{25}$; б) $-\frac{24}{25}$; в) $\frac{24}{7}$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Решение. Если в левой части уравнения к выражению $\sin 4x$ применить формулу синуса двойного аргумента, то удастся разложить левую часть на множители:

$$\sin 4x - \cos 2x = 0;$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x\ (2 \sin 2x - 1) = 0;$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin 2x - 1 = 0.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

Из уравнения $2 \sin 2x - 1$ находим:

$$\sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \boldsymbol{Z}$.

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Таким образом, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, значит,

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.}$$

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Таким образом, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, значит,

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.}$$

Полученные две формулы обычно называют *формулами понижения степени.*

Замечание. Откуда появилось такое название? Дело в том, что в левой части обоих тождеств содержится вторая степень косинуса или синуса, а в правой части — первая степень косинуса, т. е. степень понизилась. Но при применении этих формул будьте внимательны: степень понижается, зато аргумент удваивается.

Пример 6. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой понижения степени

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Получим:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13}.$$

По условию $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, значит, $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из уравнения $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{4}{13}$ получаем: $\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

б) Воспользуемся формулой понижения степени

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}.$$

Получим:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}.$$

Выше мы уже установили, что аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней синус положителен. Поэтому из уравнения $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{9}{13}$ получаем: $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) 1,5.

Пример 7. Доказать тождество $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}$.

Решение. Применим к левой части доказываемого тождества формулу понижения степени:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{2}.$$

Замечаем, воспользовавшись формулой приведения, что

$$\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) = -\sin 2x.$$

Таким образом, $1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right) = 1+\sin 2x$, а это значит, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}.$$

Пример 8. Решить уравнение $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$.

Решение. Можно, конечно, извлечь из обеих частей уравнения квадратный корень и получить два более простых уравнения: $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, — а затем каждое из этих уравнений решить по соответствующей формуле. Но удобнее воспользоваться формулой понижения степени

$$\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид $\frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{3}{4}$, откуда находим:

$$\cos 6x = \frac{1}{2};$$

$$6x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$

Пример 9. Доказать, что если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};\quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{1} = \cos x;$$

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2} = \sin x.$$

Почему сделано ограничение $x \neq \pi + 2\pi n$? Потому что если $x = \pi + 2\pi n$, то $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, и тогда $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ не определен. ◁■

§ 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения

Продолжим изучение формул тригонометрии, но сначала обсудим один вопрос, который, наверное, вы уже задавали своему учителю: формул тригонометрии очень много, неужели все эти формулы мы должны помнить, как таблицу умножения? Запоминать все формулы не нужно! Вы должны, во-первых, иметь представление о том, что эти тригонометрические формулы существуют, и, во-вторых, научиться применять их на практике. Главное — выписать нужные формулы, удачно их расположить и держать перед глазами, когда решаете тригонометрический пример. В конце главы 4 мы составим такую «шпаргалку».

В этом параграфе речь пойдет о формулах, особенно полезных при решении тригонометрических уравнений, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители.

Рассмотрим выражение $\sin(s+t)+\sin(s-t)$. Применив формулы синуса суммы и синуса разности, получим:

$$(\sin s\cos t + \cos s\sin t) + (\sin s\cos t - \cos s\sin t) = 2\sin s\cos t.$$

Итак,

$$\sin(s+t)+\sin(s-t) = 2\sin s\cos t. \qquad (1)$$

Пусть $x = s + t$, $y = s - t$. Если эти равенства сложить, получим: $x + y = 2s$, т. е. $s = \frac{x+y}{2}$. Если же из равенства $x = s + t$ вычесть равенство $y = s - t$, получим: $x - y = 2t$, т. е. $t = \frac{x-y}{2}$.

А теперь заменим в формуле (1) $s + t$ на x, $s - t$ на y, s на $\frac{x+y}{2}$, t на $\frac{x-y}{2}$. Тогда формула (1) примет вид

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.} \qquad (2)$$

Например,

$$\sin 6x + \sin 4x = 2 \sin \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} = 2 \sin 5x \cos x;$$

$$\sin 43^\circ + \sin 17^\circ = 2 \sin \frac{43^\circ + 17^\circ}{2} \cos \frac{43^\circ - 17^\circ}{2} =$$

$$= 2 \sin 30^\circ \cos 13^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 13^\circ = \cos 13^\circ.$$

Воспользовавшись тем, что $-\sin y = \sin(-y)$, и формулой (2) суммы синусов, находим, что

$$\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) =$$

$$= 2 \sin \frac{x+(-y)}{2} \cos \frac{x-(-y)}{2} = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}.} \qquad (3)$$

Например,

$$\sin 3x - \sin 5x = 2 \sin \frac{3x - 5x}{2} \cos \frac{3x + 5x}{2} =$$

$$= 2 \sin(-x) \cos 4x = -2 \sin x \cos 4x.$$

Рассмотрим выражение $\cos(s + t) + \cos(s - t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s \cos t - \sin s \sin t) + (\cos s \cos t + \sin s \sin t) = 2 \cos s \cos t.$$

Итак, $\cos(s + t) + \cos(s - t) = 2 \cos s \cos t$.

Рассуждая далее, как выше при переходе от формулы (1) и формуле (2), получим:

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.} \qquad (4)$$

Например,

$$\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}=2\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}.$$

Рассмотрим выражение $\cos(s+t)-\cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s\cos t-\sin s\sin t)-(\cos s\cos t+\sin s\sin t)=-2\sin s\sin t.$$

Итак, $\cos(s+t)-\cos(s-t)=-2\sin s\sin t$.

Рассуждая далее, как выше при переходе от формулы (1) и формуле (2) получим:

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.}\qquad(5)$$

Например,

$$\cos(2x+y)-\cos(4x-y)=$$

$$=-2\sin\frac{(2x+y)+(4x-y)}{2}\sin\frac{(2x+y)-(4x-y)}{2}=$$

$$=-2\sin 3x\sin(-x+y)=2\sin 3x\sin(x-y).$$

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sin 5x+\sin x=0$; б) $\sin 17x=\sin 7x$; в) $\cos 3x=\sin x$.

Решение. а) Преобразовав сумму синусов в произведение по формуле (2), получим:

$$\sin 5x+\sin x=2\sin 3x\cos 2x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать так:

$$2\sin 3x\cos 2x=0.$$

Значит, либо $\sin 3x=0$, либо $\cos 2x=0$. Из уравнения $\sin 3x=0$ находим:

$$3x=\pi n;\ x=\frac{\pi n}{3}.$$

Из уравнения $\cos 2x=0$ находим:

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$$

б) Имеем последовательно:

$$\sin 17x-\sin 7x=0;$$
$$2\sin 5x\cos 12x=0;$$
$$\sin 5x=0;\ \cos 12x=0.$$

Из уравнения $\sin 5x = 0$ находим: $5x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{5}$.

Из уравнения $\cos 12x = 0$ находим:

$$12x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}.$$

в) Здесь придется воспользоваться формулой приведения $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, чтобы вместо разности синуса и косинуса получить разность косинусов, для которой применима формула (5):

$$\cos 3x - \sin x = 0;$$

$$\cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0;$$

$$-2\sin\frac{3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\sin\frac{3x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = 0;$$

$$-2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x + \frac{\pi}{4} = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Из второго уравнения находим: $2x - \frac{\pi}{4} = \pi n$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}$, $x = \frac{\pi n}{5}$;

в) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

(Напомним: всюду подразумевается, что $n \in \boldsymbol{Z}$.)

Пример 2. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Решение. Сгруппируем первое и третье слагаемые левой части уравнения:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0.$$

Далее имеем:

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0;$$
$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0;$$
$$\sin 2x = 0;\ \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $2x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{2}$.

Из второго уравнения находим:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n; \quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n; \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим выражение $A\sin x + B\cos x$; пусть для определенности A и B — положительные числа.

Введем обозначение: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Заметим, что

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = \frac{A^2 + B^2}{C^2} = \frac{C^2}{C^2} = 1.$$

Это значит, что пара чисел $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$, т. е. точка с координатами $\left(\frac{A}{C}; \frac{B}{C}\right)$ лежит на числовой (единичной) окружности. Но тогда $\frac{A}{C}$ есть косинус, а $\frac{B}{C}$ — синус некоторого аргумента t, т. е. $\frac{A}{C} = \cos t$, $\frac{B}{C} = \sin t$.

Учитывая все это, поработаем с выражением $A\sin x + B\cos x$:

$$A\sin x + B\cos x = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right) =$$

$$= C(\cos t \sin x + \sin t \cos x) = C\sin(x + t).$$

Итак,

$$\boxed{A\sin x + B\cos x = C\sin(x + t), \text{ где } C = \sqrt{A^2 + B^2}.}$$

Аналогично можно выражение $A\sin x - B\cos x$, где $A > 0$, $B > 0$, преобразовать к виду $C\sin(x - t)$.

Обычно аргумент t называют *вспомогательным (дополнительным) аргументом*. Как его находят, покажем в примере 3.

Пример 3. Преобразовать в произведение выражение $5 \sin x - 12 \cos x$.

Решение. Здесь $A = 5$, $B = -12$, $C = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.

Имеем: $5 \sin x - 12 \cos x = 13\left(\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x\right)$.

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям: $\cos t = \frac{5}{13}$, $\sin t = \frac{12}{13}$; можно считать, что $t = \arcsin \frac{12}{13}$. Тогда

$$\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x = \sin x \cos t - \cos x \sin t = \sin (x - t).$$

Итак,

$$5 \sin x - 12 \cos x = 13 \sin (x - t), \text{ где } t = \arcsin \frac{12}{13}.$$

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 5 \sin x - 12 \cos x.$$

Решение. Имеем (см. пример 3): $y = 13 \sin (x - t)$.

Теперь ясно, что $y_{\text{наим}} = -13$, $y_{\text{наиб}} = 13$ (поскольку синус принимает значения от -1 до 1).

Ответ: $y_{\text{наим}} = -13$, $y_{\text{наиб}} = 13$.

Пример 5. Решить уравнение $5 \sin x - 12 \cos x = 13$.

Решение. В этом примере, как и в примере 4, есть смысл преобразовать выражение $5 \sin x - 12 \cos x$ к виду $13 \sin (x - t)$. Получим:

$$13 \sin (x - t) = 13;$$

$$\sin (x - t) = 1;$$

$$x - t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x = t + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $t = \arcsin \frac{12}{13}$ (см. пример 3).

Ответ: $x = \arcsin \frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Замечание. С равным успехом мы могли считать, что $\frac{A}{C} = \sin t$, $\frac{B}{C} = \cos t$. Тогда

$$A \sin x + B \cos x = C\left(\frac{A}{C} \sin x + \frac{B}{C} \cos x\right) =$$

$$= C (\sin t \sin x + \cos t \cos x) = C \cos (x - t).$$

§ 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Сравните название этого параграфа с названием § 22, в котором речь шла о преобразовании суммы (или разности) синусов или косинусов в произведение. Известно, что любая математическая формула на практике применяется как справа налево, так и слева направо. Поэтому неудивительно, что в тригонометрии приходится осуществлять и «движение в обратном направлении»: преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму. Об этом и пойдет речь в настоящем параграфе.

В § 22 мы видели, что $\sin(s+t) + \sin(s-t) = 2\sin s\cos t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\cos t = \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2}.}$$

В § 22 мы видели, что $\cos(s+t) + \cos(s-t) = 2\cos s\cos t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\cos s\cos t = \frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2}.}$$

В § 22 мы видели, что $\cos(s+t) - \cos(s-t) = -2\sin s\sin t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\sin t = \frac{\cos(s-t) - \cos(s+t)}{2}.}$$

Таковы три формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.

Пример 1. Преобразовать произведение в сумму:

а) $\sin 5x\cos 3x$; в) $\cos(3x+y)\cos(x-3y)$;

б) $\sin 3x\cos 5x$; г) $\sin 27^\circ \sin 57^\circ$.

Решение.

а) $\sin 5x\cos 3x = \dfrac{\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)}{2} = \dfrac{\sin 8x + \sin 2x}{2}$.

$$\text{б) } \sin 3x\cos 5x = \frac{\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)}{2} =$$

$$= \frac{\sin 8x + \sin(-2x)}{2} = \frac{\sin 8x - \sin 2x}{2}.$$

в) $\cos(3x + y)\cos(x - 3y) =$

$$= \frac{\cos((3x + y) + (x - 3y)) + \cos((3x + y) - (x - 3y))}{2} =$$

$$= \frac{\cos(4x - 2y) + \cos(2x + 4y)}{2}.$$

г) $\sin 27^\circ \sin 57^\circ = \dfrac{\cos(27^\circ - 57^\circ) - \cos(27^\circ + 57^\circ)}{2} =$

$$= \frac{\cos(-30^\circ) - \cos 84^\circ}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 84^\circ\right).$$ ◀

Пример 2. Найти значение выражения $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$, если известно, что $\cos x = \frac{2}{3}$.

Решение.

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x).$$

Значение $\cos x$ дано в условии, значение $\cos 2x$ легко найти, воспользовавшись формулой $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, откуда получаем:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

Таким образом,

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{18}.$$ ◀

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Завершая главу 4, соберем все основные формулы тригонометрии и расположим их так, чтобы ими было удобно пользоваться. Разумеется, все эти формулы применяются только при допустимых значениях аргументов.

1. *Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:*

1) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;

2) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

3) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$;

4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

5) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6) $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

2. *Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого:*

1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

3) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

4) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

3. *Формулы сложения аргументов:*

1) $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

2) $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$;

3) $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

4) $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$;

5) $\operatorname{tg} (x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;

6) $\operatorname{tg} (x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

4. *Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения:*

1) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$;

2) $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2}$;

3) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$;

4) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{x - y}{2}$.

5. *Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы:*

1) $\sin x \cos y = \dfrac{\sin (x + y) + \sin (x - y)}{2}$;

2) $\cos x \cos y = \dfrac{\cos (x + y) + \cos (x - y)}{2}$;

3) $\sin x \sin y = \dfrac{\cos (x - y) - \cos (x + y)}{2}$.

6. *Формулы приведения* (см. правило на с. 64).

ГЛАВА 5 Производная

Мы приступаем к изучению раздела математики, который обычно называют «Математический анализ». Естественно, что в школе мы ограничимся изучением лишь отдельных элементов математического анализа. Это будет первое знакомство с серьезным разделом высшей математики, в котором исследуют, как ведет себя функция не только в целом, во всей своей области определения (глобальный подход), но и около конкретной точки (локальный подход). Такой анализ практически всегда связан с понятием *предела функции*, с которым мы познакомимся в § 26, а затем изучим *производную* — важную математическую модель, давшую название всей главе. Построение этой модели основано на понятии предела.

§ 24. Предел последовательности

Что такое числовая последовательность и как она задается, вам известно из курса алгебры 9-го класса. Напомним соответствующее определение.

Определение 1. Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, или (y_n).

Последовательности можно задавать различными способами, например *словесно*, когда правило задания последовательности описано словами. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots .$$

Считают, что последовательность задана *аналитически*, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots .$$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если, например, $n = 9$, то $y_9 = 9^2$, т. е. $y_9 = 81$; если $n = 27$, то $y_{27} = 27^2$, т. е. $y_{27} = 729$. Напротив, если взят определенный член последовательности, можно указать его номер. Например, если $y_n = 625$, то из уравнения $n^2 = 625$ находим, что $n = 25$. Это значит, что 25-й член заданной последовательности равен 625.

2) $y_n = C$. Здесь речь идет о последовательности

$$C, C, C, \ldots, C, \ldots .$$

Такую последовательность называют постоянной (или *стационарной*).

3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots .$$

Определение 2. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена сверху*, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют *верхней границей последовательности*.

Например, последовательность $-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots$ ограничена сверху. В качестве верхней границы можно взять число -1 или любое число, которое больше чем -1, например 0.

Определение 3. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена снизу*, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют *нижней границей последовательности*.

Например, последовательность $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять число 1 или любое число, которое меньше 1, например $\frac{1}{2}$.

Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее называют **ограниченной последовательностью.**

Свойство ограниченности последовательности становится особенно наглядным, если члены последовательности отметить точками на числовой прямой. Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности (точнее, соответствующие им точки прямой) принадлежат некоторому отрезку. Так, изобразив члены последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ точками на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку [0; 1] (рис. 112). Значит, $y_n = \frac{1}{n}$ — ограниченная последовательность.

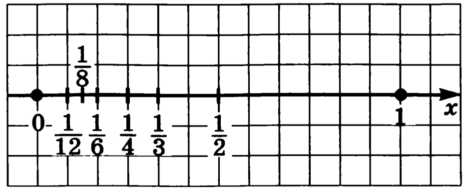


Рис. 112

Определение 4. Последовательность y_n называют **возрастающей**, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ \ldots .$$

Например, 1, 3, 5, 7, ... , $2n - 1$, ... — возрастающая последовательность.

Определение 5. Последовательность y_n называют **убывающей**, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_n > \ \ldots .$$

Например, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... , $\frac{1}{n}$, ... — убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности.**

Приведем еще несколько примеров.

1) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1}, \frac{1}{n}, \ldots$. Эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей (немонотонная последовательность).

2) $y_n = 2^n$. Речь идет о последовательности 2, 4, 8, 16, 32, ... Это возрастающая последовательность.

Вообще *если $a > 1$, то последовательность $y_n = a^n$ возрастает.*

3) $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Речь идет о последовательности $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$. Это убывающая последовательность.

Вообще *если $0 < a < 1$, то последовательность $y_n = a^n$ убывает.*

Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n).

$$(y_n)\colon 1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots ;$$

$$(x_n)\colon 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

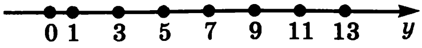


Рис. 113

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 113 для (y_n) и рис. 112 для (x_n)). Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (x_n) *сходится*, а последовательность (y_n) *расходится*.

Возникает естественный вопрос: как узнать, является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности?

Сразу уточним: математики не используют термин «точка сгущения для членов заданной последовательности», они предпочитают использовать термин «предел последовательности».

Определение 6. Число b называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$ (читают: *предел последовательности (y_n) при стремлении n к бесконечности равен b*; но обычно слова «при стремлении n к бесконечности» опускают).

Используют и такую запись: $y_n \to b$ (читают: y_n стремится к b, или y_n сходится к b).

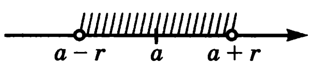


Рис. 114

Разъясним суть использованного выше термина «окрестность»: интервал $(a - r;\ a + r)$ будем называть **окрестностью точки a** (рис. 114), а число r — **радиусом окрестности**. Например, (5,9; 6,1) — окрестность точки 6, причем радиус окрестности равен 0,1.

Для рассмотренной выше последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ можно записать соотношение

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.}$$

Так же обстоит дело с последовательностью

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,\ \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \ldots .$$

Имеет место соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Вообще

$$\boxed{\text{если } |q| < 1, \text{ то } \lim_{n \to \infty} q^n = 0.}$$

А что будет с последовательностью q^n, если $|q| > 1$? Пусть, например, $q = 2$, т. е. речь идет о последовательности 2, 2^2, 2^3, 2^4, ... , 2^n, ... Эта последовательность явно не имеет предела (нет «точки сгущения»). Вообще справедливо утверждение:

если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ расходится.

Дадим несколько пояснений к определению 6.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$. Возьмем интервал $(b - r_1; b + r_1)$, т. е. окрестность точки b; r_1 — радиус этой окрестности ($r_1 > 0$). Существует номер n_1, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности: $y_{n_1} \in (b - r_1; b + r_1)$, $y_{n_1+1} \in (b - r_1; b + r_1)$, $y_{n_1+2} \in (b - r_1; b + r_1)$ и т. д.

А что будет, если взять интервал $(b - r_2; b + r_2)$, где $0 < r_2 < r_1$, т. е. если уменьшить радиус окрестности? Опять найдется номер n_2, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности, но этот номер будет больше, т. е. $n_2 > n_1$.

Если число b — предел последовательности, то, образно выражаясь, окрестность точки b — это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n_0 эта ловушка «заглатывает» y_{n_0} и все последующие члены последовательности. Чем «тоньше» ловушка, т. е. чем меньшая выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется» последовательность, но потом все равно «подписывает акт о капитуляции» — попадает, начиная с некоторого номера, в выбранную окрестность.

Сходящиеся последовательности обладают рядом свойств. Мы дадим лишь формулировки этих свойств.

Свойство 1. *Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Заметим, что обратное утверждение неверно: например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... , 1, 2, 3, ... — ограниченная последовательность, но она не сходится.

Оказывается, если последовательность не только ограничена, но и монотонна (убывает или возрастает), то она обязательно сходится; это доказал в XIX в. немецкий математик Карл Вейерштрасс.

Свойство 3. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится* (теорема Вейерштрасса).

Приведем классический пример из геометрии, в котором используется теорема Вейерштрасса. Возьмем окружность и будем последовательно вписывать в нее правильные многоугольники: 4-угольник, 8-угольник, 16-угольник и т. д. Последовательность площадей (периметров) этих правильных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, числом, выражающим площадь (периметр) описанного около окружности квадрата. Значит, построенная последовательность сходится, ее предел принимается за площадь круга (за длину окружности). Именно с помощью таких рассуждений и получена в математике формула площади круга $S = \pi r^2$ (установлено, что πr^2 — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиуса r правильных многоугольников) и формула длины окружности $l = 2\pi r$.

Выше мы отметили, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad \text{если } |q| < 1.$$

Добавим еще одно соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

Иными словами, *предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности.*

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. **Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то**

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}, \ c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (kx_n) = kb.$$

Пример. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; в) $t_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{5}{n^2} + 3$;

б) $z_n = \dfrac{k}{n^4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+4}$.

Решение. а) Имеем: $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(k\cdot\frac{1}{n^4}\right) = k\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$$
$$= k\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0.$$

Вообще для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^m}\right) = 0.}$$

в) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty}3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}.$$

Теперь можно воспользоваться правилом «предел дроби (частного)». Предел числителя равен 2, предел знаменателя равен 1, предел дроби равен 2.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

§ 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots,\ b_n,\ \dots\ .$$

т. е. последовательность (b_n), каждый член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же отличное от нуля число q (знаменатель прогрессии).

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии:

$$S_1 = b_1;$$
$$S_2 = b_1 + b_2;$$
$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$
$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4;$$
$$\dots$$
$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n;$$
$$\dots$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют *суммой геометрической прогрессии* (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, как мы говорили в 9-м классе, а суммой геометрической прогрессии). Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Напомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: если $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, то $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$. Докажем, что в этом случае $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Прежде всего воспользуемся тем, что постоянный множитель $\dfrac{b_1}{q-1}$ можно вынести за знак предела. Получим:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{b_1}{q - 1}(q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1} \cdot \lim_{n \to \infty}(q^n - 1).$$

Далее воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ (при $|q| < 1$), и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty}(q^n - 1) = 0 - 1 = -1$. Тогда

$$\frac{b_1}{q - 1} \cdot \lim_{n \to \infty}(q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1} \cdot (-1) = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Но $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, по определению, является суммой геометрической прогрессии. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Пример 1. Найти сумму геометрической прогрессии

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \dots .$$

Решение. Здесь $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Поскольку знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, мы имеем право воспользоваться только что полученной формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$. Значит, $S = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$. Обратите внимание, что нам удалось найти сумму бесконечного множества слагаемых:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 8.$$

Ответ: $S = 8$.

Пример 2. Сумма геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$, равна 9, а сумма квадратов ее членов 40,5. Найти пятый член прогрессии.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ со знаменателем q, удовлетворяющим условию $|q| < 1$; ее сумма вычисляется по формуле $\frac{b_1}{1-q}$. По условию эта сумма равна 9. Таким образом, получаем уравнение $\frac{b_1}{1-q} = 9$.

Последовательность $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2, \dots$ также является геометрической прогрессией: ее первый член равен b_1^2, знаменатель равен q^2, причем $q^2 < 1$. Сумма этой прогрессии вычисляется по формуле $\frac{b_1^2}{1-q^2}$. По условию эта сумма равна 40,5. Таким образом, получаем уравнение $\frac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5$.

В итоге задача сводится к решению системы уравнений относительно переменных b_1 и q:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Для решения системы используем метод подстановки: выразим из первого уравнения переменную b_1. Получим: $b_1 = 9(1 - q)$. Подставим это выражение вместо b_1 во второе уравнение системы.

$$\frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = 40{,}5.$$

Далее последовательно находим:

$$\frac{2(1-q)}{1+q} = 1; \quad 2 - 2q = 1 + q; \quad q = \frac{1}{3};$$

$$b_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6.$$

Итак, $\begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Требуется найти b_5. Имеем: $b_5 = b_1q^4 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}$.

Ответ: $b_5 = \frac{2}{27}$.

Пример 3. Представить в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь: а) 0,(23); б) 1,4(23).

Решение. а) 0,(23) = 0,23 23 23 23... =

$$= \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \frac{23}{100^4} + \ldots .$$

Заметим, что фактически надо найти сумму S бесконечной геометрической прогрессии, у которой $b_1 = \frac{23}{100}$, $q = \frac{1}{100}$.

Имеем: $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \dfrac{23}{99}$.

Значит, $0,(23) = \frac{23}{99}$.

б) $1{,}4(23) = 1{,}4232323\ldots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \frac{23}{10\,000\,000} + \ldots = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right) = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{1000} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{990} = 1\frac{419}{990}$.

§ 26. Предел функции

1. Предел функции на бесконечности

Пусть дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $[a; +\infty)$, и пусть прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 115). Для описания этой геометрической модели используют короткую запись:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b*).

Если же дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty; a]$, и прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 116), то в этом случае используют запись:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к минус бесконечности равен b*).

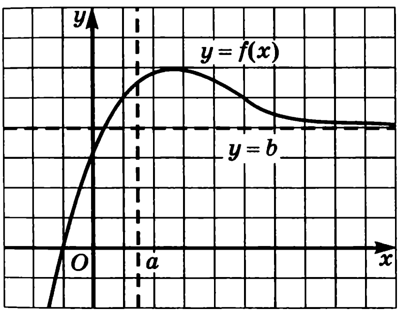


Рис. 115

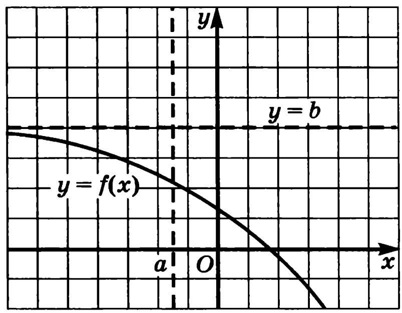


Рис. 116

Если одновременно выполняются соотношения:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{(рис. 117), —}$$

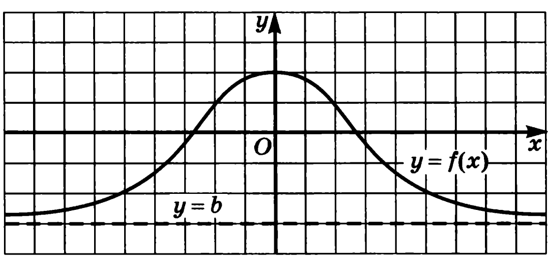


Рис. 117

то их можно объединить одной записью: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Но обычно используют более экономную запись:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b*).

Пример 1. Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $y = f(x)$ — непрерывная функция;
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.

Решение. Нам нужно построить график непрерывной функции, определенной на $(-\infty; +\infty)$, у которой есть две горизонтальные асимптоты: $y = 0$ при $x \to -\infty$ и $y = 4$ при $x \to +\infty$. Один из возможных вариантов такого графика представлен на рисунке 118, другой — на рисунке 119. ◀■

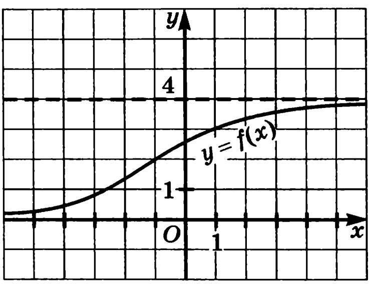


Рис. 118

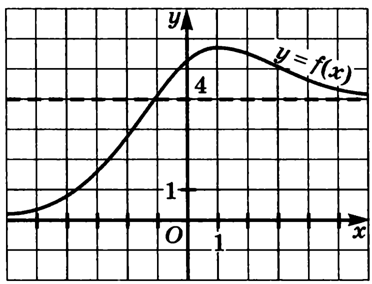


Рис. 119

Для вычисления предела функции на бесконечности используют несколько утверждений. Приведем их без доказательства.

1) ***Для любого натурального показателя m справедливо соотношение***

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^m}\right) = 0.}$$

Это можно истолковать с геометрической точки зрения: график функции $y = \frac{1}{x^m}$ (рис. 120, 121) имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

2) ***Если*** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = c$, **то**

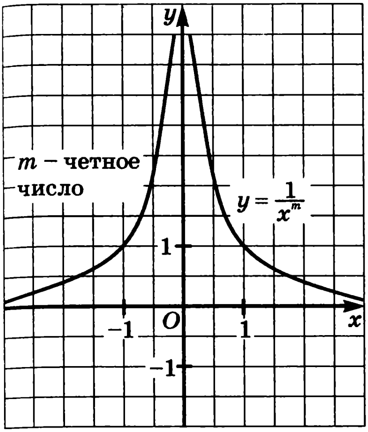


Рис. 120

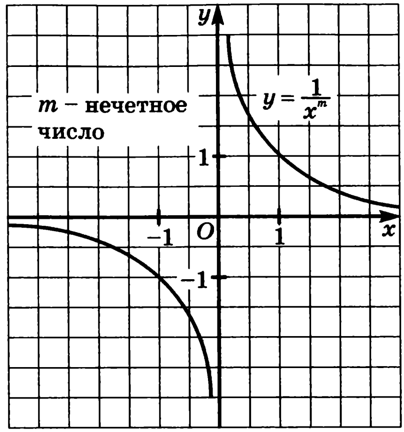


Рис. 121

а) ***предел суммы равен сумме пределов***:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) ***предел произведения равен произведению пределов***:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = bc;$$

в) ***предел частного равен частному пределов (разумеется, при условии, что $c \neq 0$)***:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c};$$

г) ***постоянный множитель можно вынести за знак предела***:

$$\lim_{x \to \infty} kf(x) = kb.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

Поскольку предел числителя равен $2 + 0 = 2$, а предел знаменателя равен $1 - 0 = 1$, то предел дроби равен $\frac{2}{1} = 2$.

Ответ: 2.

2. Предел функции в точке

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рисунках 122—124. Во всех трех случаях, казалось бы, изображена одна и та же кривая. Но разумеется, это три р а з н ы е ф у н к ц и и, они отличаются друг от друга своим поведением в точке $x = a$. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 122, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 123, значение $f(a)$ существует, но оно «неудачное», так как отличается от, казалось бы, естественного значения b. Наконец, для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 124, значение $f(a)$ существует, и оно «удачное»: $f(a) = b$. Итак, на рисунках 122—124 представлены графики трех различных функций. Если же точку $x = a$ исключить из рассмотрения, то функции совпадут: при $x < a$ и при $x > a$ графики одинаковы.

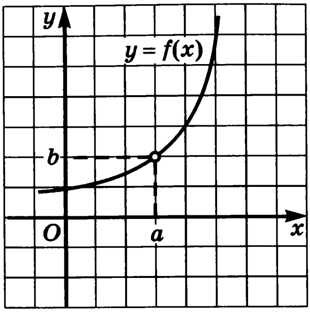


Рис. 122

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b*).

Содержательный смысл приведенной выше записи заключается в следующем: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то соответствующие значения функции все меньше и меньше будут отличаться от предельного значения b. При этом, подчеркнем еще раз, *сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.*

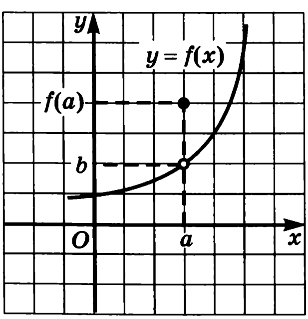


Рис. 123

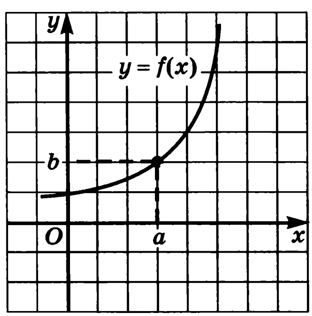


Рис. 124

Теперь ответьте на вопрос: какую из рассмотренных трех функций естественно считать непрерывной в точке $x = a$? Ответ очевиден: непрерывной естественно считать третью функцию (рис. 124), которая удовлетворяет условию $f(a) = b$, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

В каких случаях мы с вами до сих пор использовали понятие «непрерывная функция»? Мы говорили, что функция непрерывна, если видели, что ее график представляет собой сплошную линию. На самом деле график функции изображают в виде сплошной линии только тогда, когда установлена непрерывность функции.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если выполняется соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Иными словами, функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке* $x = a$, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$.

Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке** X, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

В курсе алгебры 7—9-го классов мы отмечали, что функции $y = C$, $y = kx + m$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$, $y = x^n$, где n — натуральное число, непрерывны на всей числовой прямой. Отмечали также, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0; +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$ (n — натуральное число) непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но претерпевает разрыв в точке $x = 0$. В главе 2, говоря о тригонометрических функциях, мы отмечали непрерывность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на всей числовой прямой, а также непрерывность функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ в каждом промежутке, принадлежащем области их определения. До сих пор мы опирались на наглядные представления и интуицию. В курсе высшей математики доказано, что все упомянутые утверждения верны, так что ими можно пользоваться, образно говоря, на законных основаниях.

Имеет место более сильное утверждение:

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов функций.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

Решение. Выражение $x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ определено в любой точке x, в частности в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4}$.

Решение. Выражение $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4}$ определено в любой точке $x \geqslant 0$, в частности в точке $x = 2$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0.$$

Вы заметили, наверное, что в рассмотренных примерах вычисление пределов не вызвало затруднений: достаточно было найти значение функции в точке, к которой стремится аргумент x. Но бывают случаи, когда этот прием не срабатывает.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

Решение. Если подставить значение $x = -3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя. Но заданную алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \frac{x - 3}{4}.$$

Значит, функции $y = \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$ и $y = \dfrac{x - 3}{4}$ совпадают при условии $x \neq -3$. Но напомним еще раз, что при вычислении предела функции при $x \to -3$ саму точку $x = -3$ исключают из рассмотрения. Значит,

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4}.$$

Осталось вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x - 3}{4}$. Поскольку функция $y = \frac{x - 3}{4}$ непрерывна в точке $x = -3$, получаем:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1{,}5.$$

Для вычисления предела функции в точке, как и для вычисления предела последовательности и предела функции на бесконечности, используется теорема об арифметических операциях над пределами, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. **Если $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = c$, то:**

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) + g(x)) = b + c$;

2) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)g(x) = bc$;

3) $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ **(при условии, что $c \neq 0$);**

4) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = kb$.

Пример 6. Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$;

3) $f(-2) = 1$, $f(0) = 4$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

5) $f(x) < 0$ при $x < -2$.

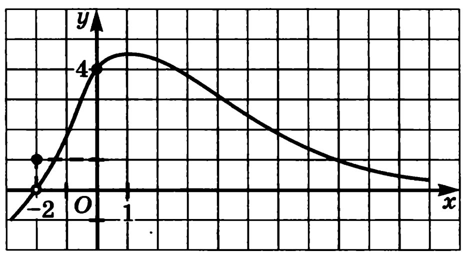


Рис. 125

Решение. Один из возможных вариантов представлен на рисунке 125.

3. Приращение аргумента. Приращение функции

Изучая поведение функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции.**

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: *дельта икс*; Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит,

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Пример 7. Найти приращение функции $y = x^2$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке:

а) $x = 1{,}1$; б) $x = 0{,}98$.

Решение. а) Введем обозначение: $f(x) = x^2$.

Имеем: $f(1) = 1^2 = 1$; $f(1{,}1) = 1{,}1^2 = 1{,}21$;

$$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 1{,}21 - 1 = 0{,}21.$$

б) $f(1) = 1$; $f(0{,}98) = 0{,}98^2 = 0{,}9604$;

$$\Delta y = f(0{,}98) - f(1) = 0{,}9604 - 1 = -0{,}0396.$$

Обратите внимание на полученный ответ: приращение функции (как, впрочем, и приращение аргумента) может быть и положительным и отрицательным числом, так что не истолковывайте термин «приращение» как «прирост».

А теперь посмотрим на определение непрерывной функции с точки зрения приращений аргумента и функции. Определение непрерывности функции в точке $x = a$ выглядит так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Здесь $x \to a$, значит, $(x - a) \to 0$, т. е. $\Delta x \to 0$. При этом $f(x) \to f(a)$, значит, $(f(x) - f(a)) \to 0$, т. е. $\Delta y \to 0$.

Получаем новое истолкование понятия непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в этой точке выполняется следующее условие:

если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Выше мы отметили, что функцию называют непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка. Уточним, что означает непрерывность функции в концевой точке промежутка, например, как понимать непрерывность функции в точках a и b отрезка $[a; b]$. Для точки a данное выше определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$, то $\Delta y \to 0$. Для точки b определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$, то $\Delta y \to 0$. В частности, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна не только в любой точке $x > 0$, но и в точке $x = 0$ (в указанном выше смысле). Поэтому функцию $y = \sqrt{x}$ считают непрерывной на всем луче $[0; +\infty)$.

Пример 8. Для функции $y = kx + m$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = kx + m$;

$$f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + m;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (k(x + \Delta x) + m) - (kx + m) =$$
$$= (kx + k \cdot \Delta x + m) - (kx + m) = k \cdot \Delta x.$$

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x.$$

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

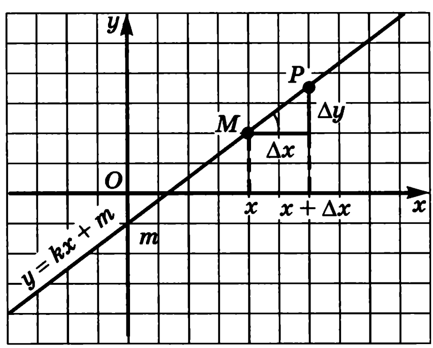


Рис. 126

На рисунке 126 изображен график линейной функции $y = kx + m$, отмечены приращения аргумента и функции при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$. Видим, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла между прямой $y = kx + m$ и положительным направлением оси x, т. е. угловой коэффициент прямой. Значит,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, что фактически и получено при решении примера 8, но с помощью формальных преобразований.

Пример 9. Для функции $y = x^2$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = x^2$;

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= (x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Итак, $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

При вычислении последнего предела мы учли, что x — фиксированная точка, т. е. постоянное число, а Δx — переменная; отсюда и следует, что если $\Delta x \to 0$, то $(2x + \Delta x) \to 2x$.

Итак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.

§ 27. Определение производной

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Часто бывает так, что, решая задачи, далекие друг от друга по содержанию, мы приходим к одной и той же математической модели. Сила математики состоит в том, что она разрабатывает способы оперирования той или иной математической моделью, которыми потом пользуются в различных областях знаний. Вы умеете работать со многими математическими моделями — уравнениями, неравенствами, системами уравнений и неравенств и др. В этом параграфе речь пойдет о принципиально новой для вас математической модели. Сначала рассмотрим две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели.

***Задача 1** (о скорости движения).* По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета. Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

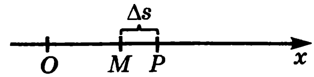


Рис. 127

Р е ш е н и е. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M (рис. 127): $OM = s(t)$. Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим ситуацию в момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке P: $OP = s(t + \Delta t)$.

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$ (м), причем перемещение из точки M в точку P произошло за Δt секунд. Нетрудно найти среднюю скорость $v_{ср}$ движения тела за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$:

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (м/с)}.$$

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (ее называют иногда *мгновенной скоростью*)? Можно сказать так: это предел средней скорости движения за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается все меньше и меньше; точнее: при условии, что $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}$.

Подводя итог решению задачи 1, получаем:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Прежде чем сформулировать вторую задачу и приступить к ее решению, выясним, что следует понимать под *касательной* к плоской кривой. Термином «касательная» мы уже пользовались (на интуитивном уровне) в курсе алгебры 7—9-го классов. Например, мы говорили, что парабола $y = x^2$ *касается* оси x в точке $x = 0$ или, что то же самое, ось x является *касательной* к параболе в точке $x = 0$ (рис. 128). И дело не в том, что ось x и парабола имеют только одну общую точку. Ведь ось y тоже имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку, однако у вас не возникнет желания назвать ось y касательной к параболе. Обычно касательную определяют следующим образом.

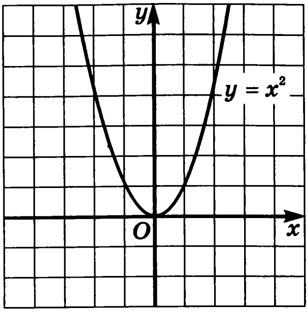


Рис. 128

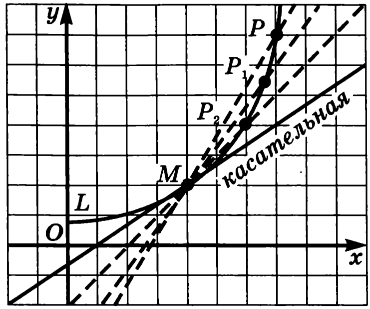


Рис. 129

Дана кривая L (рис. 129), на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на этой кривой — точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение (MP, MP_1, MP_2 и т. д.), она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некое предельное положение секущей; эту прямую — предельное положение секущей — называют **касательной к кривой L в точке M.**

Поставьте эксперимент: возьмите параболу $y = x^2$, проведите секущую OP, где O — вершина параболы, P — произвольная точка параболы. Возьмите точку P_1 поближе к O, проведите вторую секущую. Возьмите точку P_2 еще ближе к O, проведите третью секущую и т. д. Вы обнаружите, что предельным положением для построенных секущих будет ось x — это и есть касательная к параболе в ее вершине (что соответствует нашим интуитивным представлениям).

***Задача 2** (о касательной к графику функции)*. Дан график функции $y = f(x)$. На нем выбрана точка $M(a;\ f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике (рис. 130) точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между секущей и осью x, вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнет приближаться по кривой к точке M. Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}}$ будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$.

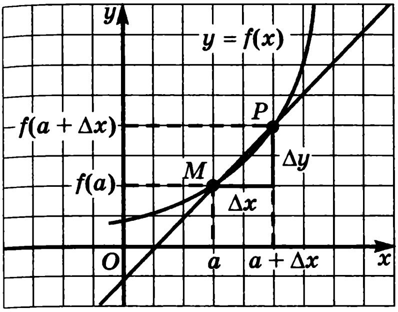


Рис. 130

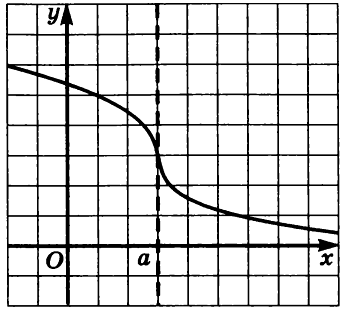


Рис. 131

Используя приведенную выше формулу для $k_{\text{сек}}$, получаем:

$$\boxed{k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Замечание. Приведенное решение неприменимо к случаю, когда касательная перпендикулярна оси абсцисс (см., например, рис. 131). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно, поскольку он не существует.

Итак, две различные задачи привели к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи физики, химии, экономики и т. д. приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т. е.:

а) дать ее формальное определение и присвоить ей новый термин;

б) ввести для нее обозначение;

в) исследовать свойства новой модели.

Этим мы и займемся.

2. Определение производной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначают $f'(x_0)$.

Итак,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).}$$

Для обозначения производной часто используют символ y'.

Отметим, что $y' = f'(x)$ — это новая функция, но, естественно, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех точках x, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют так: **производная функции $y = f(x)$.**

В примере 8 § 26 мы доказали, что для линейной функции $y = kx + m$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Это означает, что $y' = k$, или, подробнее,

$$\boxed{(kx + m)' = k.}$$

В частности,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

В примере 9 § 26 мы доказали, что для функции $y = x^2$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. Это означает, что $y' = 2x$, или, подробнее,

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Рассмотренные в пункте 1 задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$\boxed{v(t) = s'(t).}$$

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$\boxed{k = f'(a).}$$

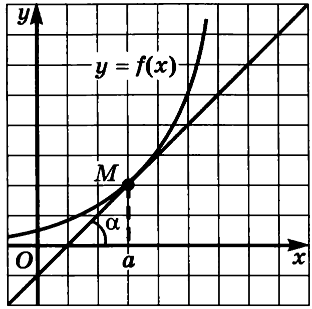


Рис. 132

Поскольку $k = \operatorname{tg} \alpha$, то верно равенство $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 132).

А теперь истолкуем определение производной с точки зрения приближенных равенств. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в конкретной точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Это означает, что около точки x выполняется приближенное равенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$, т. е. $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$.

Содержательный смысл полученного приближенного равенства заключается в следующем: приращение функции «почти пропорционально» приращению аргумента, причем коэффициентом пропорциональности является значение производной в заданной точке x. Например, для функции $y = x^2$ справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx 2x \cdot \Delta x$.

Если внимательно проанализировать определение производной, то мы обнаружим, что в нем заложен алгоритм ее нахождения. Сформулируем его.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$.

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение. Здесь $f(x) = C$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = C$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = C$.

3) $\Delta y = C - C = 0$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Здесь $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x \neq 0$) имеем: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$ (при этом предполагаем, что x и $x + \Delta x$ — числа одного знака, чтобы в промежутке между x и $x + \Delta x$ не оказалась точка 0).

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют *дифференцируемой в точке* x. Процедуру нахождения производной функции $y = f(x)$ называют *дифференцированием функции* $y = f(x)$.

Обсудим такой вопрос: как связаны между собой непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда к графику функции в точке $M(x; f(x))$ можно провести касательную, причем, напомним, угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$. Такой график не может «разрываться» в точке M, т. е. функция обязана быть непрерывной в точке x.

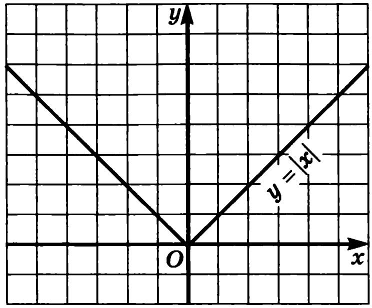


Рис. 133

Это были рассуждения «на пальцах». Приведем более строгое рассуждение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то выполняется приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Если в этом равенстве Δx устремить к нулю, то и Δy будет стремиться к нулю, а это и есть условие непрерывности функции в точке (см. пункт 3 в § 26).

Итак, *если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Например: функция $y = |x|$ непрерывна везде, в частности в точке $x = 0$ (рис. 133), но касательная к графику функции в «точке стыка» (0; 0) не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производная.

Еще один пример. На рисунке 134 изображен график функции $y = \sqrt[3]{x}$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке $x = 0$. И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке $x = 0$. Но в этой точке касательная совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс, ее уравнение имеет вид $x = 0$. Углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и $f'(0)$.

Итак, мы познакомились с новым свойством функции — дифференцируемостью. А как по графику функции можно сделать вывод о ее дифференцируемости?

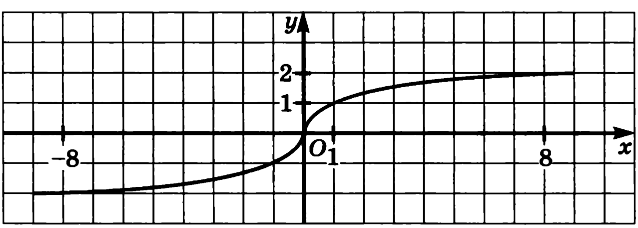


Рис. 134

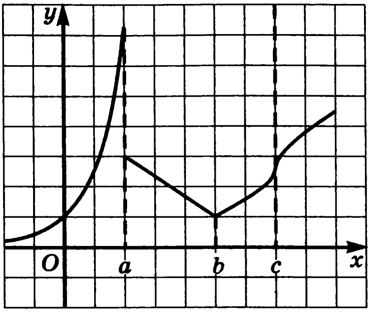


Рис. 135

Ответ фактически получен выше. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема. Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема. Так, по графику функции, изображенному на рисунке 135, можно сделать вывод: функция непрерывна всюду, кроме точки $x = a$; функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = a$, $x = b$, $x = c$; в первых двух точках касательная не существует, а в третьей точке касательная параллельна оси y.

Если же говорить о непрерывности функции не в локальном смысле (в точке), а в глобальном (на множестве), то делаем такой вывод: функция непрерывна на открытом луче $(-\infty; a)$ и на луче $[a; +\infty)$, хотя подчеркнем еще раз, в самой точке $x = a$ она не является непрерывной.

§ 28. Вычисление производных

1. Формулы дифференцирования

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций, например:

$$C' = 0;$$
$$x' = 1;$$
$$(kx + m)' = k;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Вы, конечно, узнали эти формулы — они были получены в § 27.

Список формул дифференцирования будет постепенно пополняться. Вот еще три формулы (первую из них мы докажем в конце пункта 1, а вторую и третью приведем без доказательства):

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$(\sin x)' = \cos x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5$, $x = 4$; г) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$;

б) $y = x^2$, $x = -1$; д) $y = \sin x$, $x = 0$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$; е) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. а) Пусть $f(x) = 3x + 5$. Имеем: $(3x + 5)' = 3$; значит, производная равна 3 в любой точке x, в частности в заданной точке $x = 4$. Это можно записать так: $f'(4) = 3$.

б) Пусть $f(x) = x^2$. Имеем: $(x^2)' = 2x$; значит, $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

в) Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Имеем: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; значит, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

г) Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; значит, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

д) Пусть $f(x) = \sin x$. Имеем: $(\sin x)' = \cos x$; значит, $f'(0) = \cos 0 = 1$.

е) Пусть $f(x) = \cos x$. Имеем: $(\cos x)' = -\sin x$; значит, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. ◼

Когда в § 10 мы строили график функции $y = \sin x$, то обратили внимание на следующее обстоятельство: синусоида выходит из начала координат как бы под углом 45° (рис. 136). В то время мы не могли дать объяснения этому факту. Теперь «момент истины» наступил. Мы только что видели, что для функции $y = \sin x$ выполняется равенство $f'(0) = 1$. $f'(0)$ в данном случае — это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$.

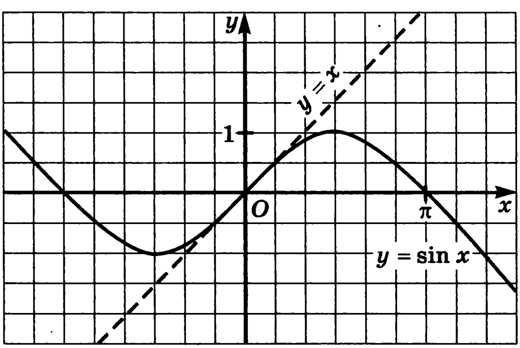


Рис. 136

Если угловой коэффициент прямой равен 1, то прямая образует с положительным направлением оси x угол 45°. Это обстоятельство и учитывается при построении графика функции $y = \sin x$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение. Пусть $f(x) = x^2$. Уравнение касательной, как уравнение всякой прямой, имеет вид $y = kx + m$. Найдем сначала k — это угловой коэффициент касательной, который равен $f'(1)$; здесь $f(x) = x^2$.

Имеем $(x^2)' = 2x$, значит, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Итак, $k = 2$, т. е. уравнение касательной надо искать в виде $y = 2x + m$.

Осталось найти значение коэффициента m. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = x^2$ с абсциссой $x = 1$, т. е. через точку (1; 1). Подставим $x = 1$, $y = 1$ в уравнение $y = 2x + m$:

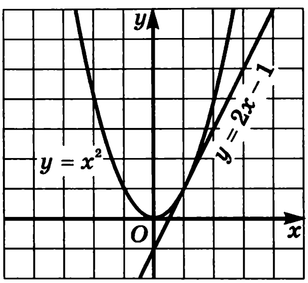


Рис. 137

$$1 = 2 \cdot 1 + m,$$
$$m = -1.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y = 2x - 1$. На рисунке 137 изображена парабола $y = x^2$ и построена прямая $y = 2x - 1$; чертеж иллюстрирует тот факт, что эта прямая касается параболы в точке (1; 1).

Ответ: $y = 2x - 1$.

Теперь, как было обещано в начале параграфа, выведем формулу дифференцирования функции $y = \sqrt{x}$. Воспользуемся алгоритмом из § 27, полагая, что $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы берем $x > 0$) имеем: $f(x) = \sqrt{x}$;

2) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$;

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$. Здесь полезно применить искусственный прием: домножить числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Что это даст? В числителе мы получим «разность квадратов»: $\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$, т. е. $(x + \Delta x) - x$, или Δx; сама дробь примет вид $\dfrac{\Delta x}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right) \cdot \Delta x}$, т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$.

Итак, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

В процессе рассуждений мы воспользовались тем, что если $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ и $\sqrt{x + \Delta x} \to \sqrt{x}$.

2. Правила дифференцирования

Здесь речь пойдет о нахождении производных суммы, произведения, частного функций.

Теорема 1. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:**

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная суммы равна сумме производных*. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Например, $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$.

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(kf(x))' = kf'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *постоянный множитель можно вынести за знак производной*.

Например,

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos x)' = -\frac{1}{3}(-\sin x) = \frac{1}{3}\sin x.$$

Теорема 3. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.*

Например,

$$((2x + 3)\sin x)' = (2x + 3)'\sin x + (2x + 3)(\sin x)' =$$
$$= 2\sin x + (2x + 3)\cos x.$$

Теорема 4. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Например,

$$\left(\frac{x^2}{5 - 4x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (5 - 4x) - x^2(5 - 4x)'}{(5 - 4x)^2} =$$
$$= \frac{2x(5 - 4x) - x^2(-4)}{(5 - 4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5 - 4x)^2}.$$

Дальнейший план изложения материала в этом пункте будет таким. Сначала мы выведем первые два правила дифференцирования — это сравнительно нетрудно. Затем рассмотрим ряд примеров на использование правил и формул дифференцирования, чтобы вы к ним привыкли. В самом конце пункта мы приведем доказательство третьего правила дифференцирования — для тех, кому это интересно.

Доказательство теоремы 1.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введем обозначение: $f(x) + g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = f(x) + g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) =$ $= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g$.

Итак, $\Delta y = \Delta f + \Delta g$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \qquad \bullet$$

Доказательство теоремы 2.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введем обозначение: $kf(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = kf(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = kf(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = kf(x + \Delta x) - kf(x) = k(f(x + \Delta x) - f(x)) = k\Delta f$.

Итак, $\Delta y = k\Delta f$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta f}{\Delta x} = k\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k\frac{\Delta f}{\Delta x} = k \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = kf'(x)$.

Итак,

$$(kf(x))' = kf'(x). \qquad \bullet$$

Пример 3. Найти производную функции $y = 3x^2 - 4x + 2$.

Решение. $y' = (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' + (-4x + 2)' =$

$$= 3(x^2)' + (-4) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4.$$

Мы воспользовались первым и вторым правилами, а также формулами дифференцирования линейной функции $y = -4x + 2$ и функции $y = x^2$.

Ответ: $y' = 6x - 4$.

Пример 4. Найти производную функции:

а) $y = x^3$; б) $y = x^4$; в) $y = x^5$.

Решение. а) Представим x^3 в виде $x^2 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Итак, $(x^3)' = 3x^2$.

б) Представим x^4 в виде $x^3 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Итак, $(x^4)' = 4x^3$.

в) Представим x^5 в виде $x^4 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4.$$

Итак, $(x^5)' = 5x^4$.

Ответ: а) $(x^3)' = 3x^2$; б) $(x^4)' = 4x^3$; в) $(x^5)' = 5x^4$.

Теперь сравним пять формул: две формулы, которые мы знали раньше, и те три формулы, которые вывели в примере 4:

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^3)' = 3x^2;$$
$$(x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^5)' = 5x^4.$$

Возникает естественная гипотеза: для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.} \qquad (1)$$

«Естественная гипотеза» — это стилистический оборот из области интуиции. Интуиция хороша для открытия новых фактов, но не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но строго не обосновали. Приведем (для интересующихся) строгое доказательство.

Мы знаем, что $x' = 1$. Эту формулу можно переписать так: $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}$. Значит, формула (1) верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

В самом деле,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k.$$

Итак, для $n = 1$ формула (1) верна — мы это проверили. Далее мы доказали, что если формула (1) верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Воспользуемся этим: формула (1) верна для $n = 1$, значит, она верна и для следующего числа $n = 2$; так как она верна для $n = 2$, то она верна и для следующего числа $n = 3$ и т. д. Значит, формула (1) верна для любого натурального числа n.

Использованный здесь метод рассуждений носит в математике название *метод математической индукции*.

Пример 5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ параллельна оси x.

Решение. $y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$.

Если касательная параллельна оси x, то ее угловой коэффициент равен нулю. Но, с другой стороны, угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Значит, нужно найти точки, в которых производная, т. е. $3x^2 - 3$, обращается в нуль. Из уравнения $3x^2 - 3 = 0$ находим: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Так как $y = x^3 - 3x + 2$, то находим соответственно:

$$y_1 = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0;$$
$$y_2 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4.$$

Итак, касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ в точке (1; 0) или в точке (−1; 4), будет параллельна оси x (в точке (1; 0) она даже совпадает с осью x). На рисунке 138 дана геометрическая иллюстрация полученного результата — построен график функции $y = x^3 - 3x + 2$. При этом мы учли, что $y = 2$ при $x = 0$ и что $y = 0$ при $x = -2$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точке $x = -2$. ◀■

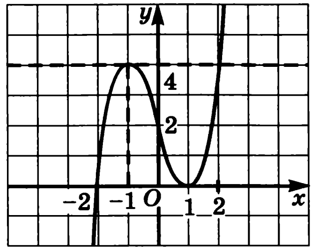


Рис. 138

Пример 6. Найти производную функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, и правилом дифференцирования частного (теорема 4). Получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, мы вывели еще одну формулу дифференцирования:

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Понятно, что эта формула справедлива лишь при допустимых значениях x, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

б) Рассуждая аналогично (советуем провести соответствующие рассуждения), получим:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$ ◀■

Завершая этот пункт, выведем правило дифференцирования произведения, т. е. функции $y = f(x)\,g(x)$.

Доказательство теоремы 3.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной, а также тем, что равенство $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$ можно записать в виде $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$.

1) Введем обозначение: $f(x)g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = f(x)g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta f)\,(g(x) + \Delta g) =$$
$$= f(x)\, g(x) + \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g.$$

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x)\, g(x) + \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g) -$
$- f(x)\, g(x) = \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g.$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \dfrac{\Delta f\, \Delta g}{\Delta x\, \Delta x} \Delta x.$

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \Delta x \right) =$

$= f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x) + f'(x)\, g'(x) \cdot 0 = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$

Итак,

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$ ●

3. Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$

Мы знаем, чему равны производные функций $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{x}$. Нередко на практике приходится находить производные функций $y = \sin 2x$, $y = \cos\left(3 - \frac{x}{2}\right)$ и т. д. Возникает вопрос: если мы знаем, чему равна производная функции $y = f(x)$, то как вычислить производную функции $y = f(kx + m)$?

С функцией $y = \sin 2x$ можно поступить так. Известно, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Тогда

$$(\sin 2x)' = (2 \sin x \cos x)' = 2\,((\sin x)' \cos x + \sin x\, (\cos x)') =$$
$$= 2\,(\cos x \cos x + \sin x\, (-\sin x)) = 2\,(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x.$$

Итак, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения и правилом вынесения постоянного множителя за знак производной, а также формулами синуса и косинуса двойного аргумента, мы доказали, что

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x.$$

А как быть с производной функции $y = \sin 3x$ или $y = \cos 4x$? Неужели каждый раз придется применять соответствующие формулы тригонометрии? Не придется. Обратим внимание на выведенную формулу. Чем она отличается от формулы дифференцирования функции $y = \sin x$? Только тем, что появился дополнительный множитель 2, а в роли аргумента выступает $2x$. Точно так же будет обстоять дело и в других аналогичных случаях: используется известная формула дифференцирования и появляется дополнительный множитель, равный коэффициенту при x. Например, справедливы следующие формулы:

$$(\cos 4x)' = 4 \cdot (-\sin 4x);$$
$$(\sin 3x)' = 3 \cdot \cos 3x;$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}};$$

$$((2x+1)^5)' = 2 \cdot 5(2x+1)^4 = 10(2x+1)^4.$$

Вообще справедливо следующее утверждение (приведем его без доказательства):

***Теорема 5*. Производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле**

$$\boxed{(f(kx+m))' = kf'(kx+m).}$$

Пример 7. Найти значение производной функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{7 - 2{,}16x}$, в точке $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную в произвольной точке x. Известно, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. По этой формуле найдем интересующую нас производную, но при этом учтем два обстоятельства:

1) под знаком корня напишем не x, а $7 - 2{,}16x$;

2) укажем дополнительный множитель, равный $(-2{,}16)$ — это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\sqrt{7 - 2{,}16x}\right)' = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16x}}.$$

Чтобы вычислить $f'(1)$, в полученное выражение подставим $x = 1$:

$$f'(1) = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16}} = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4{,}84}} = -\frac{2{,}16}{4{,}4} = -\frac{27}{55}.$$

Ответ: $f'(1) = -\frac{27}{55}$.

§ 29. Уравнение касательной к графику функции

В § 27 говорилось о том, что если точка $M(a;\ f(a))$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ и если в этой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Мы этим уже несколько раз пользовались. Например, в § 27 было установлено, что график функции $y = \sin x$ (синусоида) в начале координат образует с осью абсцисс угол 45° (точнее, касательная к графику в начале координат составляет с положительным направлением оси x угол 45°), а в примере 5 § 27 были найдены точки на графике заданной функции, в которых касательная параллельна оси абсцисс. В примере 2 § 28 было составлено уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$ (точнее, в точке (1; 1), но чаще указывают только значение абсциссы, полагая, что если значение абсциссы известно, то значение ординаты можно найти из уравнения $y = f(x)$). В этом параграфе мы выработаем алгоритм составления уравнения касательной к графику любой функции.

Пусть даны функция $y = f(x)$ и точка $M(a; f(a))$ на графике этой функции; пусть известно, что существует $f'(a)$. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в заданной точке. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси ординат, имеет вид $y = kx + m$, поэтому задача состоит в нахождении значений коэффициентов k и m.

С угловым коэффициентом k проблем нет: известно, что $k = f'(a)$. Для вычисления значения m воспользуемся тем, что искомая прямая проходит через точку $M(a; f(a))$. Это значит, что если подставить координаты точки M в уравнение прямой, получим верное равенство: $f(a) = ka + m$, т. е. $m = f(a) - ka$.

Осталось подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение прямой:

$$y = kx + m;$$
$$y = kx + (f(a) - ka);$$
$$y = f(a) + k(x - a);$$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (1)$$

Нами получено *уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.*

Например, если $f(x) = x^2$ и $x = 1$ (т. е. $a = 1$), то $f(a) = f(1) = 1^2 = 1$; $f'(x) = 2x$, значит, $f'(a) = f'(1) = 2$.

Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = 2$, получим: $y = 1 + 2(x - 1)$, т. е. $y = 2x - 1$.

Сравним этот результат с тем, что был получен в примере 2 § 28. Естественно, получилось то же самое.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в начале координат; здесь $f(x) = \operatorname{tg} x$. Имеем: $a = 0$, $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, значит, $f'(0) = 1$. Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$, получим: $y = x$.

Именно поэтому мы и провели тангенсоиду в § 14 (см. рис. 94) через начало координат под углом 45° к оси абсцисс.

Решая эти достаточно простые примеры, мы фактически пользовались определенным алгоритмом, который заложен в формуле (1). Сделаем этот алгоритм явным.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1).

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) $a = 1$.
2) $f(a) = f(1) = 1$.
3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ в формулу (1). Получим:

$y = 1 - (x - 1)$, т. е. $y = 2 - x$.

На рисунке 139 изображена гипербола $y = \frac{1}{x}$, построена прямая $y = 2 - x$. Чертеж иллюстрирует приведенные выкладки: прямая $y = 2 - x$ касается гиперболы в точке (1; 1).

Ответ: $y = 2 - x$.

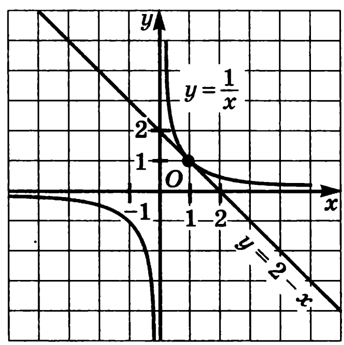


Рис. 139

Пример 2. К графику функции $y = \frac{x^3}{3}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 4x - 5$.

Решение. Уточним формулировку задачи. Требование «провести касательную» обычно означает «составить уравнение касательной». Это логично, ведь если составлено уравнение касательной, то не должно быть затруднений с построением на координатной плоскости прямой по ее уравнению.

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Но, в отличие от предыдущего примера, здесь пока имеется неясность: не указана явно абсцисса точки касания.

Начнем рассуждать так. Искомая касательная должна быть параллельна прямой $y = 4x - 5$. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент касательной должен быть равен угловому коэффициенту заданной прямой: $k_{\text{кас}} = 4$. Но $k_{\text{кас}} = f'(a)$. Таким образом, значение a мы можем найти из уравнения $f'(a) = 4$.

Имеем: $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$; $f'(a) = a^2$.

Из уравнения $f'(a) = 4$, т. е. $a^2 = 4$, находим: $a_1 = 2$, $a_2 = -2$. Значит, имеются две касательные, удовлетворяющие условию задачи: одна в точке с абсциссой 2, другая в точке с абсциссой -2.

Теперь можно действовать по алгоритму.

1) $a_1 = 2$, $a_2 = -2$.

2) $f(a_1) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$, $f(a_2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$.

3) $f'(a_1) = f'(a_2) = 4$.

4) Подставив значения $a_1 = 2$, $f(a_1) = \frac{8}{3}$, $f'(a_1) = 4$ в формулу (1), получим: $y = \frac{8}{3} + 4(x - 2)$, т. е. $y = 4x - \frac{16}{3}$.

Подставив значения $a_2 = -2$, $f(a_2) = -\frac{8}{3}$, $f'(a_2) = 4$ в формулу (1), получим: $y = -\frac{8}{3} + 4(x + 2)$, т. е. $y = 4x + \frac{16}{3}$.

Ответ: $y = 4x - \frac{16}{3}$; $y = 4x + \frac{16}{3}$.

В § 27 мы отметили, что для функции $y = f(x)$, имеющей производную в фиксированной точке x, справедливо приближенное равенство

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

или, подробнее,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Для удобства дальнейших рассуждений изменим обозначения: вместо x будем писать a, вместо $x + \Delta x$ будем писать x и, соответственно, вместо Δx будем писать $x - a$. Тогда написанное выше приближенное равенство примет вид

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a),$$

или

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (2)$$

А теперь рассмотрим рисунок 140. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке $M(a; f(a))$. Отмечена точка x на оси абсцисс близко от a. Ясно, что $f(x)$ — ордината графика функции в указанной точке x. А что такое $f(a) + f'(a)(x - a)$? Это ордината касательной, соответствующая той же точке x — см. формулу (1). В чем же смысл приближенного равенства (2)? В том, что в качестве приближенного значения функции в точке x берут значение ординаты касательной в той же точке.

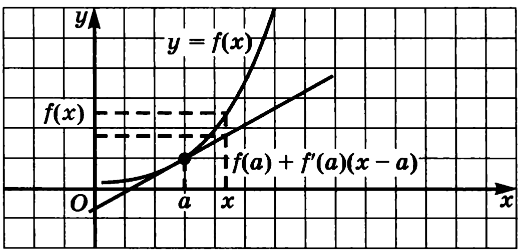


Рис. 140

Пример 3. Найти приближенное значение числового выражения $1{,}02^7$.

Р е ш е н и е. Речь идет о нахождении значения функции $y = x^7$ в точке $x = 1{,}02$. Воспользуемся формулой (2), учитывая, что в данном примере $f(x) = x^7$, $a = 1$, $f(a) = f(1) = 1$; $x = 1{,}02$, $f'(x) = 7x^6$, и, следовательно, $f'(a) = f'(1) = 7 \cdot 1^6 = 7$.

В итоге получаем:

$$1{,}02^7 \approx 1 + 7 \cdot 0{,}02, \text{ т. е. } 1{,}02^7 \approx 1{,}14.$$

Если мы воспользуемся калькулятором, то получим:

$$1{,}02^7 = 1{,}148685667\ldots .$$

Как видите, точность приближения вполне приемлема.

Ответ: $1{,}02^7 \approx 1{,}14$.

§ 30. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы

1. Исследование функций на монотонность

На рисунке 141 представлен график некоторой возрастающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x острый угол, а значит, у обеих прямых положительный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) > 0$ и $f'(x_2) > 0$. А в точке $x = 0$ касательная совпала с осью x, в этой точке выполняется равенство $f'(0) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *возрастающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \geqslant 0.$$

На рисунке 142 представлен график некоторой убывающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x тупой угол, а значит, у обеих прямых отрицательный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) < 0$ и $f'(x_2) < 0$. А в точке $x = x_3$ касательная параллельна оси x, в этой точке выполняется равенство $f'(x_3) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *убывающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \leqslant 0.$$

Эти рассуждения показывают, что между характером монотонности функции и знаком ее производной есть определенная связь:

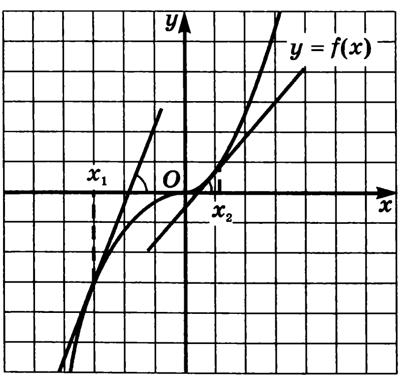


Рис. 141

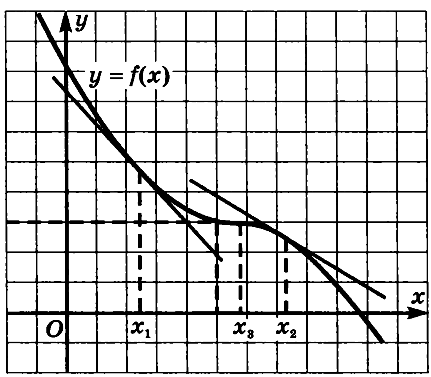


Рис. 142

если функция возрастает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неотрицательна; если функция убывает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неположительна.

Но гораздо важнее то, что верны и обратные утверждения, показывающие, как по знаку производной можно установить характер монотонности функции на промежутке. При этом, во избежание недоразумений, берут только открытые промежутки, т. е. интервалы или открытые лучи. Дело в том, что для функции, определенной на отрезке $[a; b]$, не очень корректно ставить вопрос о существовании и о значении производной в концевой точке (в точке $x = a$ или в точке $x = b$), поскольку в точке $x = a$ приращение аргумента может быть только положительным, а в точке $x = b$ — только отрицательным. В определении производной такие ограничения не предусмотрены.

Теорема 1. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.**

Теорема 2. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.**

Доказательства этих теорем обычно проводят в курсе высшей математики. Мы ограничимся проведенными выше рассуждениями «на пальцах» и для большей убедительности дадим еще физическое истолкование сформулированных теорем.

Пусть по прямой движется материальная точка, $s = s(t)$ — закон движения. Если скорость все время положительна, то точка постоянно удаляется от начала отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ возрастает. Если же скорость все время отрицательна, то точка постоянно приближается к началу отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ убывает. Если скорость движения была положительна, затем в какой-то отдельный момент времени обратилась в нуль, а потом снова стала положительной, то движущееся тело в указанный момент времени как бы притормаживает, а потом продолжает удаляться от начальной точки. Так что и в этом случае функция $s = s(t)$ возрастает. А что такое скорость точки? Это производная пути по времени. Значит, от знака производной (скорости) зависит характер монотонности функции — в данном случае функции $s = s(t)$. Об этом как раз и говорят обе сформулированные теоремы.

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2.$$

Очевидно, что при всех x выполняется неравенство $5x^4 + 6x^2 \geqslant 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в точке $x = 0$. Значит, по теореме 1, функция возрастает на всей числовой прямой. ◁■

Пример 2. а) Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Исследовать функцию на монотонность — это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких — убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции:

$$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$

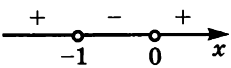


Рис. 143

На рисунке 143 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на открытом луче $(-\infty; -1)$ производная положительна, на интервале $(-1; 0)$ — отрицательна, на открытом луче $(0; +\infty)$ — положительна. Значит, на первом из указанных промежутков функция возрастает, на втором — убывает, на третьем — возрастает.

Если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его концевых точках (именно так обстоит дело для заданной функции), эти концевые точки включают в промежуток монотонности функции.

Таким образом, заданная функция возрастает на луче $(-\infty; -1]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$, убывает на отрезке $[-1; 0]$.

б) Графики функций строят «по точкам». Для этого надо составить таблицу значений функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$, куда обязательно следует включить значения функции в концевых точках промежутков монотонности ($x = -1$ и $x = 0$) и еще несколько значений:

x	-1	0	1	-2
y	0	-1	4	-5

Отметим эти точки на координатной плоскости. Учтем найденные в пункте а) промежутки возрастания и убывания функции, а также то, что в точках $x = -1$ и $x = 0$ производная функции равна нулю, т. е. касательная к графику функции в каждой из указанных точек параллельна оси абсцисс; точнее, в точке $(-1; 0)$ она совпадает с осью абсцисс. Учтем, наконец, то, что функция непрерывна, т. е. ее графиком является сплошная линия. График заданной функции изображен на рисунке 144. ◁■

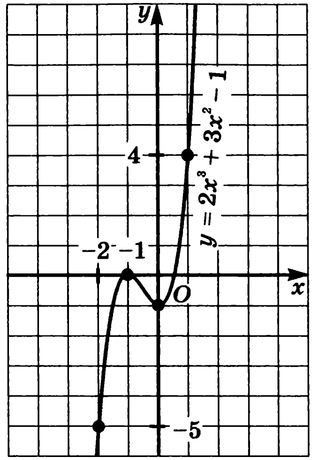


Рис. 144

Завершая рассуждения об исследовании функций на монотонность, обратим внимание на одно обстоятельство. Мы говорили, что если на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X; если же на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке. А что будет, если на всем промежутке выполняется тождество $f'(x) = 0$? Видимо, функция не должна ни возрастать, ни убывать. Что же это за функция? Ответ очевиден — это постоянная функция $y = C$ (буква C — первая буква слова *constanta*, что означает «постоянная»). Справедлива следующая теорема, формальное доказательство которой мы не даем, ограничиваясь приведенными выше правдоподобными рассуждениями.

Теорема 3. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на промежутке X.**

2. Точки экстремума функции и их нахождение

Вернемся к графику функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (рис. 144). На графике есть две уникальные точки, по сути дела определяющие вид графика, — это точки $(-1; 0)$ и $(0; -1)$. В этих точках:

1) происходит изменение характера монотонности функции (слева от точки $x = -1$ функция возрастает, справа от нее, но только до точки $x = 0$, функция убывает; слева от точки $x = 0$ функция убывает, справа от нее — возрастает);

2) касательная к графику функции параллельна оси x (или даже совпадает с осью x), т. е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;

3) $f(-1)$ — наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = -1$. Точно

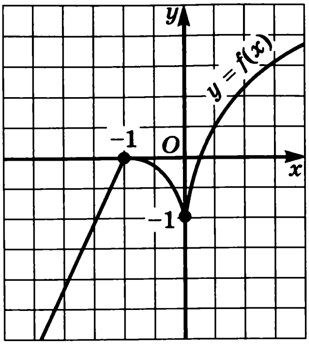


Рис. 145

так же $f(0)$ — наименьшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = 0$.

А теперь рассмотрим рисунок 145, где изображен график другой функции. Не правда ли, он похож на предыдущий график? На нем те же две уникальные точки, но одна из указанных выше трех особенностей этих точек изменилась: нельзя сказать, что касательные к графику в этих точках параллельны оси x. В точке $x = -1$ касательная вообще не существует, а в точке $x = 0$ она перпендикулярна оси x (точнее, она совпадает с осью y).

Определение 1. Точку $x = x_0$ называют **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рисунках 144 и 145, имеют точку минимума $x = 0$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ или $(-0{,}2; 0{,}2)$, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(0)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке минимума обычно обозначают $y_{\min}$. Не путайте это значение (наименьшее, но в локальном смысле) с $y_{\text{наим}}$, т. е. с наименьшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рисунки 144 и 145. Вы видите, что наименьшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а $y_{\min}$ существует.

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рисунках 144 и 145, имеют точку максимума $x = -1$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(-1)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке максимума обычно обозначают y_{max}. Не путайте это значение (наибольшее, но в локальном смысле) с $y_{наиб}$, т. е. с наибольшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рисунки 144 и 145. Вы видите, что наибольшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а y_{max} существует.

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — *точки экстремума* (от латинского слова *extremum* — «крайний»).

Если функция $y = f(x)$ достигает в точке x_0 минимума (максимума), то наименование «точка минимума (максимума)» используют как для значения $x = x_0$, так и для точки $(x_0, f(x_0))$.

Как искать точки экстремума функции? Ответ на этот вопрос мы сможем получить, еще раз проанализировав графические модели, представленные на рисунках 144 и 145.

Обратите внимание: для функции, график которой изображен на рисунке 144, в обеих точках экстремума производная обращается в нуль. А для функции, график которой изображен на рисунке 145, в обеих точках экстремума производная не существует. Это не случайно, поскольку, как доказано в курсе математического анализа, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. **Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.**

Для удобства условимся внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть *стационарными*, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, — *критическими*.

Пример 3. Построить график функции $y = 2x^2 - 6x + 3$.

Решение. Графиком заданной квадратичной функции является парабола, причем ветви параболы направлены вверх, поскольку коэффициент при x^2 положителен. Но в таком случае вершина параболы является точкой минимума функции, касательная к параболе в ее вершине параллельна оси x, значит, в вершине параболы должно выполняться условие $y' = 0$.

Имеем: $y' = (2x^2 - 6x + 3)' = 4x - 6$.

Приравняв производную нулю, получим:

$$4x - 6 = 0; \quad x = 1{,}5.$$

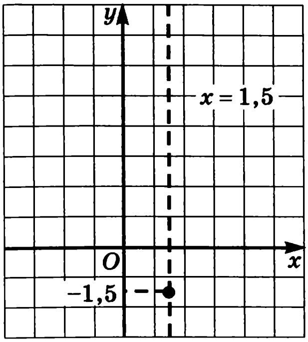


Рис. 146

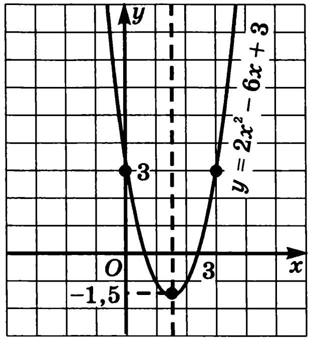


Рис. 147

Подставив найденное значение x в уравнение параболы, получим:

$$y = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 3 = -1{,}5.$$

Итак, вершиной параболы служит точка (1,5; −1,5), а осью параболы — прямая $x = 1{,}5$ (рис. 146). В качестве контрольных точек удобно взять точку (0; 3) и симметричную ей относительно оси параболы точку (3; 3). На рисунке 147 по найденным трем точкам построена парабола — график заданной квадратичной функции. ◁■

Помните ли вы, как мы строили график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в 8—9-м классах? Практически так же, только ось параболы находили не с помощью производной, а по формуле $x = -\frac{b}{2a}$, которую приходилось запоминать. Решение, показанное в примере 3, освобождает от необходимости помнить эту формулу. Чтобы найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ или уравнение ее оси симметрии, достаточно приравнять нулю производную квадратичной функции.

Теперь вернемся к теореме 4, в которой говорится, что если в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то $x = x_0$ — стационарная или критическая точка функции. Возникает естественный вопрос: верна ли обратная теорема, т. е. верно ли, что если $x = x_0$ — стационарная или критическая точка, то в этой точке функция имеет экстремум? Ответ отрицательный. Рассмотрим рисунок 148, где изображен график возрастающей функции, не имеющей точек экстремума. У этой функции есть стационарная точка

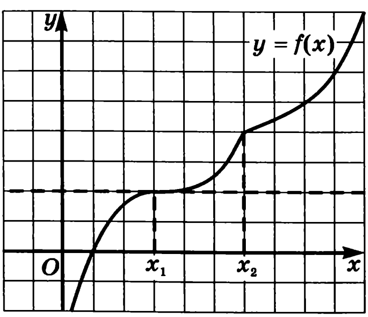


Рис. 148

$x = x_1$, в которой производная обращается в нуль (в этой точке график функции имеет касательную, параллельную оси x), но это не точка экстремума. И есть критическая точка $x = x_2$, в которой производная не существует, но это также не точка экстремума. Значит, теорема 4 дает только *необходимое условие экстремума* (справедлива прямая теорема), но оно не является *достаточным условием* (обратная теорема не выполняется).

А как же быть с достаточным условием? Как узнать, есть ли в стационарной или в критической точке экстремум? Для ответа на этот вопрос снова рассмотрим графики функций, представленные на рисунках 144, 145, 147, 148.

Обратим внимание, что при переходе через точку максимума (речь идет о точке $x = -1$ на рисунках 144 и 145) изменяется характер монотонности функции: слева от точки максимума функция возрастает, справа — убывает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки максимума производная положительна, справа — отрицательна.

Аналогично, при переходе через точку минимума (речь идет о точке $x = 0$ на рисунках 144 и 145 и о точке $x = 1{,}5$ на рисунке 147) характер монотонности функции также изменяется: слева от точки минимума функция убывает, справа — возрастает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки минимума производная отрицательна, справа — положительна.

Если же и слева и справа от стационарной или критической точки производная имеет один и тот же знак, то в этой точке экстремума нет. Именно так обстоит дело с функцией, график которой изображен на рисунке 148: и слева и справа от стационарной точки x_1 и от критической точки x_2 производная положительна.

Наши рассуждения могут служить подтверждением (но, конечно, не доказательством — строгие доказательства проводятся в курсе высшей математики) справедливости следующей теоремы.

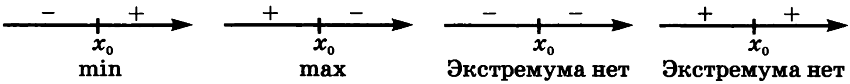
Теорема 5 (достаточные условия экстремума). **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Этой длинной формулировкой на практике пользоваться неудобно, советуем применять следующую условную схему для знаков производной:



Пример 4. а) Найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Здесь $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x;$$
$$f'(x) = 12x(x^2 - 4x + 4);$$
$$f'(x) = 12x(x - 2)^2.$$

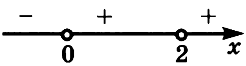


Рис. 149

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 2$ — это две стационарные точки заданной функции. На рисунке 149 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на промежутке $(-\infty; 0)$ производная отрицательна, на промежутке $(0; 2)$ — положительна, на промежутке $(2; +\infty)$ — положительна. Значит, $x = 0$ — точка минимума функции, а $x = 2$ точкой экстремума не является. На первом из указанных выше промежутков функция убывает, на втором и третьем — возрастает.

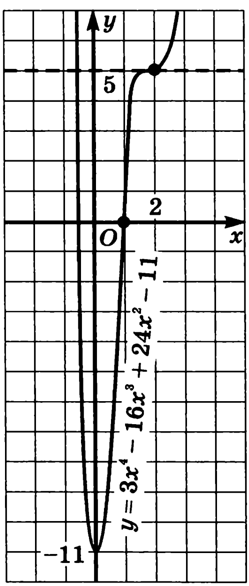


Рис. 150

В точке минимума $x = 0$ имеем: $f(0) = -11$ (подставили значение $x = 0$ в выражение $f(x)$), значит, $y_{min} = -11$.

б) Чтобы построить график функции, нужно знать особо важные точки графика. К таковым относятся:

— найденная точка минимума $(0; -11)$;

— стационарная точка $x = 2$; в этой точке:

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 - 11 = 5;$$

— точки пересечения графика с осями координат; в данном примере это уже найденная точка $(0; -11)$ — точка пересечения графика с осью y. Кроме того, можно заметить, что $f(1) = 0$, т. е. найдена точка пересечения графика с осью x — это точка $(1; 0)$.

Итак, мы имеем точку минимума (0; −11), точку пересечения графика с осью x — точку (1; 0) и стационарную точку (2; 5). В точке (2; 5) касательная к графику функции параллельна оси x, но это не точка экстремума, а так называемая *точка перегиба*.

График функции схематически изображен на рисунке 150. Заметим, что есть еще одна точка пересечения графика с осью абсцисс, но найти ее нам не удалось. ◁■

Завершая этот пункт, заметим, что мы фактически выработали алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем 1, 2 и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Заметим, что если заданная функция имеет вид $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, то также можно пользоваться этим алгоритмом, но с одним добавлением: *полюсы функции*, т. е. точки, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль, тоже отмечают на числовой прямой, причем делают это до определения знаков производной. Разумеется, полюсы не могут быть точками экстремума.

Пример 5. Исследовать функцию $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$ на монотонность и экстремумы.

Решение. Заметим, что функция всюду непрерывна, кроме точки $x = 0$. Воспользуемся указанным выше алгоритмом.

1) Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{(x^4 + 16)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot (x^4 + 16)}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 16)}{x^4} =$$

$$= \frac{2x^5 - 32x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 16)}{x^4} = \frac{2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x^3}.$$

2) Производная обращается в нуль в точках $x = 2$ и $x = -2$ — это стационарные точки. Производная не существует в точке $x = 0$, но это не критическая точка, это точка разрыва функции (полюс).

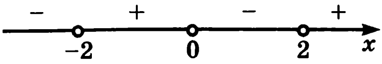


Рис. 151

3) Отметим точки -2, 0 и 2 на числовой прямой и расставим знаки производной на получившихся промежутках (рис. 151).

4) Делаем выводы: на луче $(-\infty; -2]$ функция убывает, на полуинтервале $[-2; 0)$ функция возрастает, на полуинтервале $(0; 2]$ функция убывает, на луче $[2; +\infty)$ функция возрастает.

Далее, $x = -2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$ (подставили значение $x = -2$ в формулу $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$).

Аналогично устанавливаем, что и $x = 2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$.

§ 31. Построение графиков функций

За годы изучения курса алгебры в школе вы накопили достаточно большой опыт построения графиков функций. В основном вы строили графики «по точкам», т. е. для заданной функции $y = f(x)$ находили контрольные точки $(x_1; f(x_1))$, $(x_2; f(x_2))$, $(x_3; f(x_3))$, $(x_4; f(x_4))$ и т. д., отмечали их на координатной плоскости и, полагаясь на интуицию, соединяли найденные точки плавной кривой. Как выбирались эти контрольные точки? Иногда обдуманно, например, находили вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$ или специально искали точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат. Но чаще выбор контрольных точек был случайным.

Заметим, что графики любых функций строят по точкам. Но в тех случаях, когда вид графика заранее неизвестен, эти точки надо выбирать со смыслом — уметь выделять особо важные точки графика, которые определяют его вид. Об этом мы уже говорили выше, когда строили графики функций $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (см. рис. 144) и $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ (см. рис. 150). К особо важным точкам графика функции $y = f(x)$ относят:

— стационарные и критические точки;
— точки экстремума;
— точки пересечения графика с осями координат;
— точки разрыва функции.

В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции, когда заранее трудно представить вид графика, полезно применять определенную схему исследования свойств функции, которая помогает составить представление о ее графике. После этого можно приступать к построению графика по точкам.

В курсе математического анализа разработана универсальная схема исследования свойств функции и построения ее графика. Мы будем использовать упрощенные варианты указанной схемы.

1) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то достаточно найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек. Именно так мы поступали в § 30, когда строили графики следующих функций:

$$y = 2x^2 - 6x + 3 \quad \text{(рис. 147);}$$
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad \text{(рис. 144);}$$
$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11 \quad \text{(рис. 150).}$$

2) Если функция $y = f(x)$ определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с нахождения области определения функции (если область не задана) и с указания ее точек разрыва.

3) Полезно исследовать функцию на четность, поскольку график четной или нечетной функции обладает симметрией (соответственно относительно оси y или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при $x \geqslant 0$, а затем дорисовать симметричную ветвь.

4) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то (см. § 26) прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Асимптота дает своеобразный ориентир для графика.

5) Если $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ и при $x = a$ знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то $x = a$ — *вертикальная асимптота* графика функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ — ее график (гипербола) изображен на рисунке 152 — вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$.

Пример 1. Построить график функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Решение 1. Введем обозначение: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Найдем область определения функции:

$$D(f) = (-\infty; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

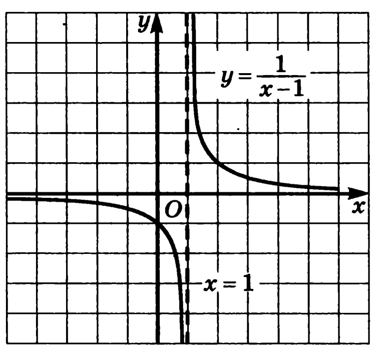


Рис. 152

Значит, заданная функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат, а потому начнем с построения ветви графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптоты нет. Для нахождения горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Имеем:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Значит, $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. Имеем:

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Поскольку мы договорились рассматривать лишь случай, когда $x \geqslant 0$, выберем значение $x = 1$. При $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

На промежутке $[0; 1]$ функция возрастает, на промежутке $[1; +\infty)$ функция убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединив их плавной кривой и учтя при этом, что $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ — точка максимума и что $y = 0$ — горизонтальная асимптота, построим ветвь искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 153). Добавив ветвь,

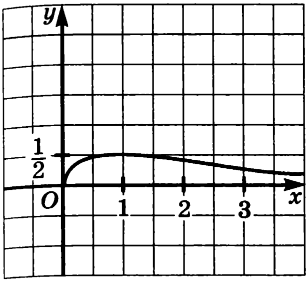


Рис. 153

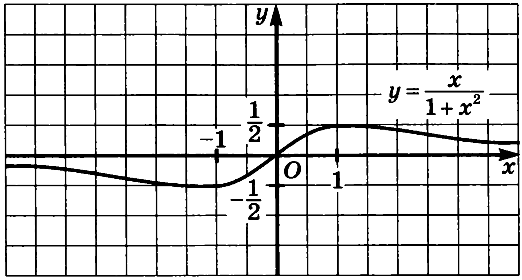


Рис. 154

симметричную построенной относительно начала координат, получим весь график (рис. 154). ◁■

Пример 2. Построить график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Р е ш е н и е. 1. Введем обозначение: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Найдем область определения функции. Она задается условиями $x \neq 1$, $x \neq -1$ (при значениях $x = 1$, $x = -1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x).$$

Значит, заданная функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1.$$

Значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная существует всюду в области определения функции, значит, критических точек у функции нет.

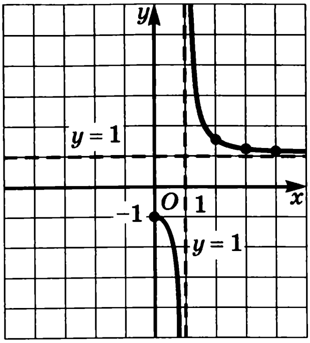


Рис. 155

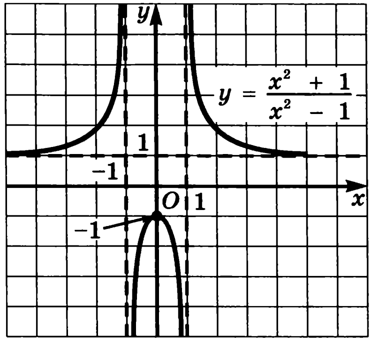


Рис. 156

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ $y' > 0$; при $x > 0$: $y' < 0$. Значит, $x = 0$ — точка максимума функции, причем $y_{\max} = f(0) = \frac{0^2 + 1}{0^2 - 1} = -1$.

При $x > 0$ имеем: $y' < 0$; но следует учесть наличие точки разрыва $x = 1$. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке $[0; 1)$ функция убывает, на промежутке $(1; +\infty)$ функция также убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	$\frac{1}{2}$	2	3	4
y	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{15}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, учтя при этом, что $(0; -1)$ — точка максимума, что $y = 1$ — горизонтальная асимптота, что $x = 1$ — вертикальная асимптота, построим ветви искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 155). Добавив ветви, симметричные построенным относительно оси ординат, получим весь график (рис. 156). ◁■

§ 32. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин

1. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

Вы уже накопили некоторый опыт нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы использовали для этого график функции. Пусть, например, дана функция

$y = \frac{x}{1+x^2}$. Построив ее график (см. рис. 154), легко сделать вывод о том, что $y_{наим} = -\frac{1}{2}$, а $y_{наиб} = \frac{1}{2}$.

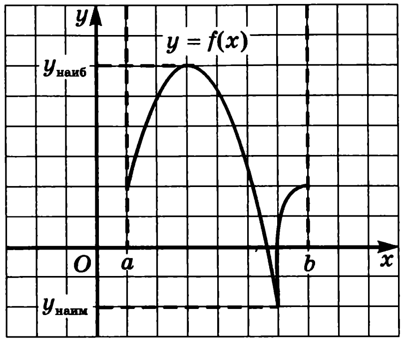


Рис. 157

В некоторых случаях легко найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. Например, для функции $y = \sqrt{9-x^2}$ можно рассуждать так: ясно, что $\sqrt{9-x^2} \leqslant 3$, значит, $y_{наиб} = 3$ (это значение достигается функцией в точке $x = 0$). С другой стороны, ясно, что $\sqrt{9-x^2} \geqslant 0$, значит, $y_{наим} = 0$ (это значение достигается функцией при $x = 3$ или при $x = -3$).

В более сложных случаях для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции используется производная.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ — несколько графиков таких функций представлено на рисунках 157—159. Анализируя указанные геометрические модели, можно прийти к следующим выводам.

1. ***Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений*** (эта теорема доказывается в курсе высшей матеатики).

2. ***Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.***

Здесь возможны варианты — некоторые из них представлены на рисунках 157—159. На рисунке 157 и наибольшее и наименьшее

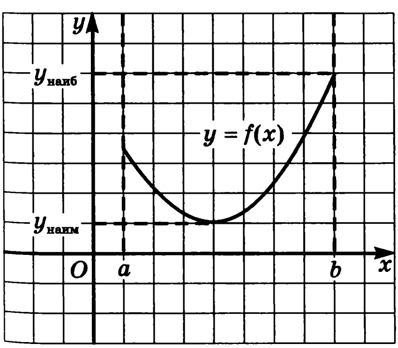


Рис. 158

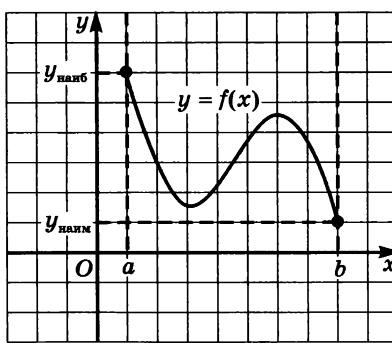


Рис. 159

значения достигаются внутри отрезка. На рисунке 158 наименьшее значение достигается внутри отрезка, а наибольшее — в правом конце. На рисунке 159 и наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах отрезка.

3. *Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.*

В этом нет ничего удивительного, поскольку в этом случае наибольшее (или наименьшее) значение функции одновременно является экстремумом, а экстремум достигается только в стационарной или критической точке.

Подведем итог сказанному в виде алгоритма.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$).

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

а) на отрезке $[-4; 6]$; в) на отрезке $[-2; 2]$.

б) на отрезке $[0; 6]$;

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2) Производная существует при всех x, значит, критических точек у функции нет. Стационарные точки найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$3x^2 - 6x - 45 = 0;$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0;$$
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

Дальнейшие рассуждения зависят от указанного в условии отрезка.

а) Обе стационарные точки (и $x = -3$, и $x = 5$) принадлежат заданному отрезку $[-4; 6]$. Значит, на третьем шаге мы составим такую таблицу значений функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

Таким образом, $y_{\text{наим}} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{\text{наиб}} = 82$ (достигается в точке $x = -3$).

б) Отрезку $[0; 6]$ принадлежит лишь одна из двух найденных стационарных точек, а именно точка $x = 5$. Значит, составим такую таблицу значений функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

x	0	5	6
y	1	-174	-161

Таким образом, $y_{\text{наим}} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{\text{наиб}} = 1$ (достигается в точке $x = 0$).

в) Отрезку $[-2; 2]$ не принадлежит ни одна из найденных стационарных точек, значит, достаточно вычислить значения функции в концевых точках: если $x = -2$, то $y = 71$; если $x = 2$, то $y = -93$.

Таким образом, в этом случае $y_{\text{наим}} = -93$, $y_{\text{наиб}} = 71$. ◄

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 5x^3 - x|x - 1|$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Если $x \geqslant 1$, то $|x - 1| = x - 1$, и функция принимает вид $y = 5x^3 - x^2 + x$; если $x < 1$, то $|x - 1| = 1 - x$, и функция принимает вид $y = 5x^3 + x^2 - x$. Таким образом, речь идет о кусочной функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3 - x^2 + x, \text{ если } x \geqslant 1; \\ 5x^3 + x^2 - x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

1) Вычисляя $f'(x)$, мы должны учесть, что при $x > 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 - x^2 + x$. Получим: $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$.

При $x < 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 + x^2 - x$. Получим: $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$.

В «точке стыка» $x = 1$ производная не существует, это критическая точка функции.

Итак, $f'(x) = \begin{cases} 15x^2 - 2x + 1, \text{ если } x > 1; \\ 15x^2 + 2x - 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

2) Критическую точку мы уже нашли — это точка $x = 1$. Найдем стационарные точки, решив уравнение $f'(x) = 0$.

Если $x > 1$, то $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$; уравнение $15x^2 - 2x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Если $x < 1$, то $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$; из уравнения $15x^2 + 2x - 1 = 0$ находим: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Из этих двух значений заданному отрезку $[0; 2]$ принадлежит только точка $x = \frac{1}{5}$.

3) Составим таблицу значений функции $y = 5x^3 - x|x - 1|$, включив в нее точки $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$, $x = \frac{1}{5}$ — концы заданного отрезка и лежащие внутри отрезка критическую и стационарную точки:

x	0	$\frac{1}{5}$	1	2
y	0	$-\frac{3}{25}$	5	38

Из имеющихся в таблице значений наименьшим является $-\frac{3}{25}$, наибольшим — 38.

Ответ: $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{25}$; $y_{\text{наиб}} = 38$.

А как быть, если речь идет о нахождении наибольшего или наименьшего значения функции, непрерывной на незамкнутом промежутке, например на интервале? Можно построить график функции и снять информацию с полученной графической модели. Но чаще оказывается более удобным использовать следующую теорему.

***Теорема.* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$.

На рисунках 160 и 161 приведены соответствующие геометрические иллюстрации.

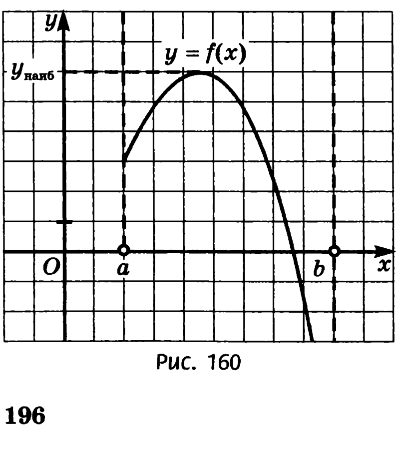


Рис. 160

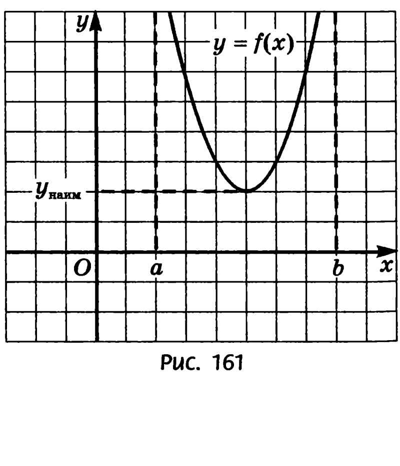


Рис. 161

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{1 + x^2}$ на луче $[0; +\infty)$.

Решение. $y' = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ (см. пример 1 из § 31).

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Заданному лучу $[0; +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = 1$. При $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем $y_{\max} = \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2}$.

Поскольку $x = 1$ — единственная стационарная точка функции на заданном промежутке, причем точка максимума, то, по теореме,

$$y_{\text{наиб}} = y_{\max} = \frac{1}{2}.$$

Ранее (см. рис. 153) был построен график функции на заданном луче — он хорошо иллюстрирует полученный результат.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$.

2. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений величин

На практике всем нам часто приходится решать так называемые *задачи на оптимизацию* (*optimum* — наилучший). Инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т. д.

В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причем надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает свое наименьшее или наибольшее (наилучшее в данных условиях) значение.

Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трех этапов математического моделирования: 1) составление математической модели; 2) работа с моделью; 3) ответ на вопрос задачи. Прежде чем переходить к конкретному примеру решения задачи на оптимизацию, дадим некоторые рекомендации методического плана.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Проанализировав условия задачи, выделите *оптимизируемую величину* (О. В.), т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., примите за *независимую переменную* (Н. П.) и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите *реальные границы* изменения Н. П. (в соответствии с условиями задачи), т. е. область определения для искомой О. В.

3) Исходя из условий задачи, выразите y через x. Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{\text{наим}}$ или $y_{\text{наиб}}$, в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические установки, которые были даны в пункте 1 данного параграфа.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Здесь следует дать конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Пример 4. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 500 литров воды. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим О. В. буквой S.

2) Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной (Н. П.) сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой x. Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменной: $X = (0; +\infty)$.

3) Если бак вмещает 500 л воды, то объем V бака равен 500 дм^3. Если h — высота бака, то $V = x^2h$, откуда находим $h = \frac{V}{x^2}$.

На рисунке 162 изображен прямоугольный параллелепипед, указаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$. Значит,

$$S = x^2 + 4 \cdot \frac{V}{x^2} \cdot x = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

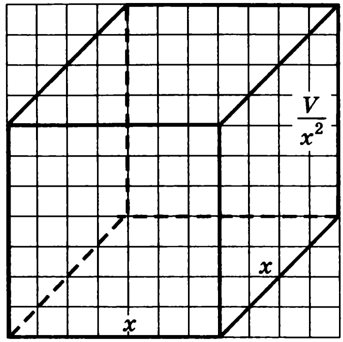


Рис. 162

Итак,

$S = x^2 + \frac{2000}{x}$, где $x \in (0; +\infty)$ (мы учли, что $V = 500$).

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $S = x^2 + \frac{2000}{x}$, $x \in (0; +\infty)$ надо найти $y_{\text{наим}}$. Для этого нужна производная функции:

$$S' = 2x - \frac{2000}{x^2};$$

$$S' = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}.$$

На промежутке $(0; +\infty)$ критических точек нет, а стационарная точка только одна: $S' = 0$ при $x = 10$.

Заметим, что при $x < 10$ выполняется неравенство $S' < 0$, а при $x > 10$ выполняется неравенство $S' > 0$. Значит, $x = 10$ — единственная стационарная точка, причем точка минимума функции на заданном промежутке, а потому, согласно теореме из пункта 1, в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна 10 дм.

Ответ: 10 дм.

ГЛАВА 6 Степени и корни. Степенные функции

§ 33. Понятие корня *n*-й степени из действительного числа

Рассмотрим уравнение $x^4 = 1$ и решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = x^4$ и прямую $y = 1$ (рис. 163, *а*). Они пересекаются в точках $A(-1; 1)$ и $B(1; 1)$. Абсциссы точек A и B, т. е. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, являются корнями уравнения $x^4 = 1$.

Рассуждая точно так же, находим корни уравнения $x^4 = 16$: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

А теперь попробуем решить уравнение $x^4 = 5$; геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 163, *б*. Ясно, что уравне-

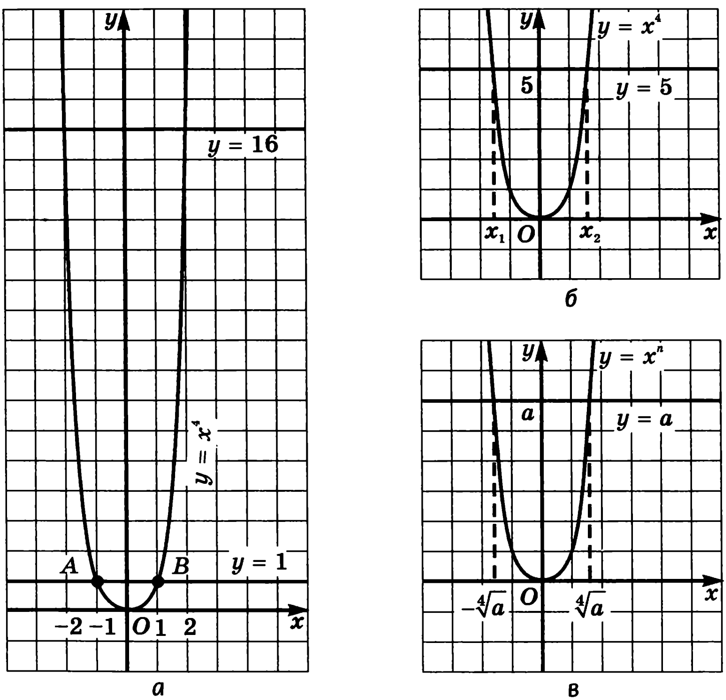


Рис. 163

ние имеет два корня: x_1 и x_2, — причем эти числа, как и в двух предыдущих случаях, противоположные. Но для первых двух уравнений корни были найдены без труда (их можно было найти и не пользуясь графиками), а с уравнением $x^4 = 5$ имеются проблемы: по чертежу мы не можем указать значения корней, а можем только установить, что один корень располагается левее точки -1, а второй — правее точки 1.

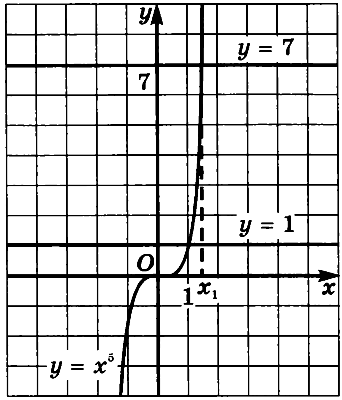


Рис. 164

Можно доказать, что x_1 и x_2 — иррациональные числа (т. е. бесконечные непериодические десятичные дроби).

Встретившись с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\sqrt[4]{}$, который назвали *корнем четвертой степени*, и с помощью этого символа корни уравнения $x^4 = 5$ записали так: $x_1 = -\sqrt[4]{5}$, $x_2 = \sqrt[4]{5}$ (читают: *корень четвертой степени из пяти*).

Мы говорили об уравнении $x^4 = a$, где $a > 0$ ($a = 1; 16; 5$). С равным успехом мы могли говорить и об уравнении $x^n = a$, где $a > 0$, а n — любое натуральное число. Например, решая графически уравнение $x^5 = 1$, находим $x = 1$ (рис. 164); решая уравнение $x^5 = 7$, устанавливаем, что уравнение имеет один корень x_1, который располагается на оси x чуть правее точки 1 (см. рис. 164). Для числа x_1 используют обозначение $\sqrt[5]{7}$.

Вообще, решая уравнение $x^n = a$, где $a > 0$, $n \in N$, $n > 1$ (рис. 163, *в*), получаем в случае четного n два корня: $-\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$; в случае нечетного n — один корень $\sqrt[n]{a}$ (читают: *корень n-й степени из числа a*). Решая уравнение $x^n = 0$, получаем единственный корень $x = 0$.

З а м е ч а н и е. В математическом языке, как и в обыденном, бывает так, что один и тот же термин применяется к разным понятиям. Так, в предыдущем абзаце слово «корень» употреблено в двух смыслах: как корень уравнения (к такому толкованию вы давно привыкли) и как корень n-й степени из числа (новое толкование). Обычно из контекста бывает ясно, какое толкование термина имеется в виду.

Теперь мы готовы дать точное определение.

Определение 1. **Корнем n-й степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.**

Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a при этом называют *подкоренным числом*, а число n — *показателем корня*.

Если $n = 2$, то обычно говорят не «корень второй степени», а «квадратный корень». В этом случае пишут не $\sqrt[2]{a}$, а $\sqrt{a}$. Это тот частный случай, который вы специально изучали в курсе алгебры 8-го класса.

Если $n = 3$, то вместо «корень третьей степени» часто говорят «кубический корень». Первое знакомство с кубическим корнем у вас состоялось в курсе алгебры 9-го класса.

Итак,

если $a \geqslant 0$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$; 2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Вообще $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ — одна и та же зависимость между неотрицательными числами a и b, но только вторая описана более простым языком (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения корня из неотрицательного числа называют обычно *извлечением корня*. Эта операция является обратной по отношению к возведению в соответствующую степень. Сравните:

Возведение в степень	Извлечение корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3$

Еще раз обратите внимание: в таблице фигурируют только положительные числа, поскольку это оговорено в определении 1. И хотя, например, $(-6)^2 = 36$ — верное равенство, перейти от него к записи с использованием квадратного корня, т. е. написать, что $\sqrt{36} = -6$, нельзя. По определению, $\sqrt{36}$ — положительное число, значит, $\sqrt{36} = 6$, (а не -6). Точно так же, хотя и $2^4 = 16$, и $(-2)^4 = 16$, переходя к знакам корней, мы должны написать $\sqrt[4]{16} = 2$ (и в то же время $\sqrt[4]{16} \neq -2$).

Иногда выражение $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом* (от латинского слова *radix* — «корень»). В русском языке термин *радикальный* используется довольно часто, например, «радикальные изменения» — это значит «коренные изменения». Между прочим и само обозначение корня напоминает о слове *radix*: символ $\sqrt{}$ — это стилизованная буква *r*.

Пример 1. Вычислить:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt[3]{0{,}125}$; в) $\sqrt[7]{0}$; г) $\sqrt[4]{17}$.

Решение. а) $\sqrt{49} = 7$, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, так как $0{,}5 > 0$ и $0{,}5^3 = 0{,}125$.

в) $\sqrt[7]{0} = 0$.

г) В отличие от предыдущих примеров, мы не можем указать точное значение числа $\sqrt[4]{17}$. Ясно лишь, что оно больше, чем 2, но меньше, чем 3, поскольку $2^4 = 16$ (это меньше, чем 17), а $3^4 = 81$ (это больше, чем 17). Приближенное значение числа $\sqrt[4]{17}$ можно найти с помощью калькулятора, который содержит операцию извлечения корня: $\sqrt[4]{17} \approx 2{,}03$ (с точностью до 0,01). ◀

Операцию извлечения корня определяют и для отрицательного подкоренного числа, но только в случае нечетного показателя корня. Иными словами, равенство $(-2)^5 = -32$ можно переписать в эквивалентной форме: $\sqrt[5]{-32} = -2$. При этом используется следующее определение.

***Определение* 2. Корнем нечетной степени *n* из отрицательного числа *a* ($n = 3, 5, \ldots$) называют такое** отрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.

Это число, как и в определении 1, обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a — *подкоренное число*, число n — *показатель корня*.

Итак,

$$\text{если } a < 0,\ n = 3, 5, 7, \ldots,\ \text{то: 1) } \sqrt[n]{a} < 0;\ \text{2) } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Таким образом, корень четной степени имеет смысл (т. е. определен) только для неотрицательного подкоренного числа; корень нечетной степени имеет смысл для любого подкоренного числа.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{3x+4} = -2$; в) $\sqrt[4]{2-5x} = -4$;

б) $\sqrt[4]{3x-2} = 1$; г) $\sqrt[6]{x^2-5x+68} = 2$.

Р е ш е н и е. а) Если $\sqrt[3]{y} = -2$, то $y = -8$. Фактически обе части заданного уравнения мы должны возвести в куб. Получим:

$$3x + 4 = -8;$$
$$3x = -12;$$
$$x = -4.$$

б) Возведем обе части уравнения в четвертую степень. Получим:

$$3x - 2 = 1;$$
$$3x = 3;$$
$$x = 1.$$

в) Здесь не надо возводить в четвертую степень, это уравнение не имеет корней. Почему? Потому что, согласно определению 1, корень четной степени — неотрицательное число.

г) Возведя обе части уравнения в шестую степень, получим:

$$x^2 - 5x + 68 = 64;$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

§ 34. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

В предыдущем параграфе мы ввели понятие корня n-й степени из действительного числа, отметили, что из любого неотрицательного числа можно извлечь корень любой степени (второй, третьей, четвертой и т. д.), а из отрицательного числа можно извлечь корень нечетной степени. Но тогда следует подумать и о функции вида $y = \sqrt[n]{x}$, ее графике и свойствах. Этим мы и займемся в настоящем параграфе. Сначала поговорим о функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае неотрицательных значений аргумента.

Функция $y = x^n$, $x \in [0; +\infty)$ монотонна, значит, обратима (см. § 3). Выразив x через y из уравнения $y = x^n$, получим: $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Таким образом, функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной для функции $y = x^n$ (см. § 3), а потому *график функции* $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$ *симметричен графику функции* $y = x^n$, $x \geqslant 0$ *относительно прямой* $y = x$ (рис. 165).

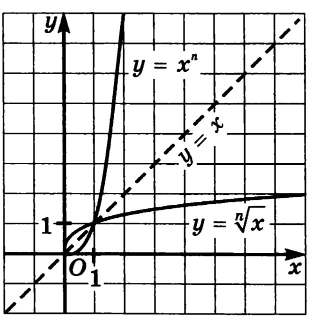


Рис. 165

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;

2) функция не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на $[0; +\infty)$;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет наибольшего значения, а $y_{\text{наим}} = 0$;

6) непрерывна;

7) $E(f) = [0; +\infty)$.

8) функция $y = \sqrt[n]{x}$ выпукла вверх на луче $[0; +\infty)$.

В главе 5 вы познакомились еще с одним свойством функции — дифференцируемостью, видели, что функция $y = x^n$ дифференцируема в любой точке, ее производная равна nx^{n-1}. Геометрически это означает, что в любой точке графика функции $y = x^n$ к нему можно провести касательную. Этим же свойством обладает и график функции $y = \sqrt[n]{x}$: в любой его точке к графику можно провести касательную. Таким образом, мы можем отметить еще одно свойство функции $y = \sqrt[n]{x}$:

9) функция $y = \sqrt[n]{x}$ дифференцируема в любой точке $x > 0$.

Обратите внимание: о дифференцируемости функции в точке $x = 0$ речь не идет — в этой точке касательная к графику функции совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс. Значит, производная функции $y = \sqrt[n]{x}$ в точке $x = 0$ не существует.

Пример 1. Построить график функции $y = \sqrt[4]{x+1} - 4$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; -4)$ — пунктирные прямые $x = -1$ и $y = -4$ проведены на рисунке 166.

2) «Привяжем» функцию $y = \sqrt[4]{x}$ к новой системе координат. Это и будет требуемый график. ◁■

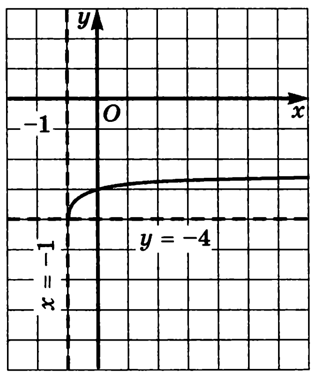


Рис. 166

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[6]{x} = 2 - x.$$

Решение. Первый способ.

1) Введем в рассмотрение две функции: $y = \sqrt[6]{x}$ и $y = 2 - x$.

2) Построим график функции $y = \sqrt[6]{x}$ (рис. 167).

3) Построим график линейной функции $y = 2 - x$ (см. рис. 167).

4) Построенные графики пересекаются в одной точке A, причем по графику

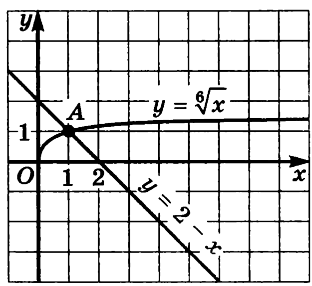


Рис. 167

можно сделать предположение, что координаты точки A таковы: (1; 1). Проверка показывает, что на самом деле точка (1; 1) принадлежит и графику функции $y = \sqrt[6]{x}$, и графику функции $y = 2 - x$. Значит, наше уравнение имеет один корень: $x = 1$ — абсцисса точки A.

Второй способ.

Графическая иллюстрация, представленная на рисунке 167, наглядно поясняет следующее утверждение, с которым мы впервые встретились в курсе алгебры 9-го класса: *если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает, и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один.*

Вот как, опираясь на это утверждение, мы можем решить заданное уравнение:

1) заметим, что при $x = 1$ выполняется равенство $\sqrt[6]{1} = 2 - 1$, значит, $x = 1$ — корень уравнения (этот корень мы угадали);

2) функция $y = 2 - x$ убывает, а функция $y = \sqrt[6]{x}$ возрастает; значит, корень у заданного уравнения только один, и этим корнем является найденное выше значение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

До сих пор мы говорили о функции $y = \sqrt[n]{x}$ только для неотрицательных значений аргумента. Но ведь если n — нечетное число, выражение $\sqrt[n]{x}$ имеет смысл и для $x < 0$. Значит, следует поговорить о функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечетного n для любых значений x.

Справедливо следующее свойство: *если n — нечетное число ($n = 3, 5, 7, \ldots$), то $y = \sqrt[n]{x}$ — нечетная функция.*

В самом деле, пусть $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Тогда

$$f(-x) = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} = -f(x)$$

(для нечетного показателя n такие преобразования верны). Итак, $f(-x) = -f(x)$, а это и означает нечетность функции.

Как же выглядит график функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечетного показателя n? При $x \geqslant 0$ так, как показано на рисунке 165, — это ветвь искомого графика. Добавив к ней ветвь, симметричную ей относительно начала координат (что, напомним, характерно для любой нечетной функции), получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$ (рис. 168). Обратите внимание: ось y является касательной к графику в точке $x = 0$.

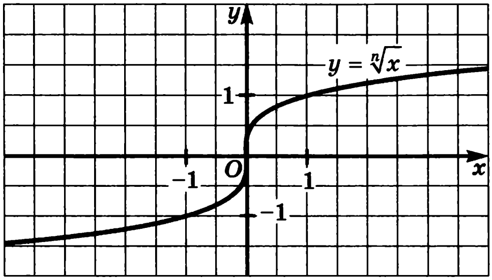


Рис. 168

Итак, повторим еще раз:

если n — четное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рисунке 165;

если n — нечетное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рисунке 168.

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Сначала построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и выделим его часть на луче $(-\infty; 1]$ (рис. 169). Затем построим график функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ (берем только одну ветвь графика — при $x > 0$) и выделим его часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (рис. 170). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график заданной функции (рис. 171; масштаб увеличен).

Перечислим (опираясь на построенный график) свойства функции $y = f(x)$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) ни четная, ни нечетная;

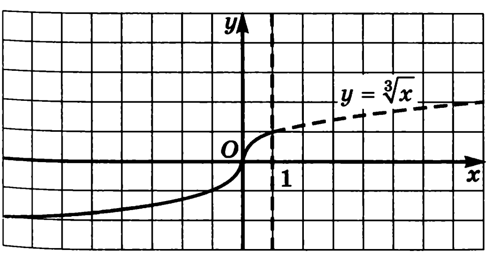


Рис. 169

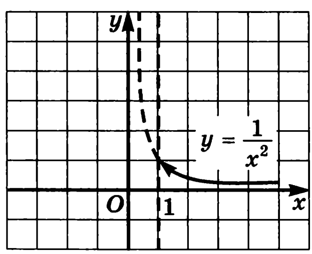


Рис. 170

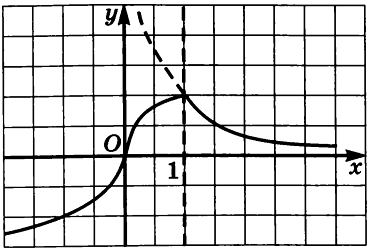


Рис. 171

3) убывает на луче $[1; +\infty)$; возрастает на луче $(-\infty; 1]$;

4) не ограничена снизу, ограничена сверху;

5) нет наименьшего значения, а $y_{наиб} = 1$ (достигается в точке $x = 1$);

6) непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; 1]$;

8) функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = 0$ и $x = 1$;

Отметим еще, что график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$; это означает, напомним, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ◁■

Пример 4. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{4x - 8}$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2 - 9}$;

в) $y = \sqrt{2x + 2} - \sqrt[6]{16 - x^2}$.

Решение. а) Под знаком корня четной степени должно находиться неотрицательное число, значит, задача сводится к решению неравенства $4x - 8 \geqslant 0$. Получаем: $x \geqslant 2$. Значит, $D(f) = [2; +\infty)$.

б) Под знаком корня нечетной степени может находиться любое число, значит, здесь на x не накладывается никаких ограничений, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

в) Выражение $\sqrt{2x+2}$ имеет смысл при условии $2x + 2 \geqslant 0$, а выражение $\sqrt[6]{16-x^2}$ — при условии $16 - x^2 \geqslant 0$. Значит, должны одновременно выполняться неравенства $2x + 2 \geqslant 0$ и $16 - x^2 \geqslant 0$, т. е. задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 2 \geqslant 0, \\ 16 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая неравенство $2x + 2 \geqslant 0$, находим: $x \geqslant -1$.

Решим неравенство $16 - x^2 \geqslant 0$. Разложим левую часть неравенства на множители: $(4 - x)(4 + x) \geqslant 0$. Левая часть неравенства обращается в 0 в точках -4 и 4. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 172). Числовая прямая разбивается указанными точками на три промежутка, причем на каждом промежутке выражение $p(x) = (4 - x)(4 + x)$ сохраняет постоянный знак (знаки указаны). Промежуток, на котором выполняется неравенство $p(x) > 0$, заштрихован. По условию задачи

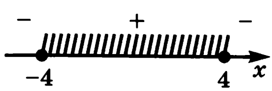


Рис. 172

нас интересуют и те точки x, в которых выполняется равенство $p(x) = 0$. Таких точек две: $x = -4$, $x = 4$ — они на рисунке 172 отмечены темными кружочками. Таким образом, на рисунке 172 представлена иллюстрация решения второго неравенства системы.

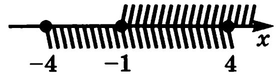


Рис. 173

Отметим найденные решения первого и второго неравенств системы на одной координатной прямой, использовав для первого — верхнюю, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 173). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы: отрезок $[-1; 4]$.

Итак, $D(f) = [-1; 4]$.

§ 35. Свойства корня n-й степени

Чтобы успешно использовать на практике операцию извлечения корня, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в этом параграфе.

Все свойства формулируются и доказываются только для неотрицательных значений переменных, содержащихся под знаками корней.

Теорема 1. **Корень n-й степени ($n = 2, 3, 4, \ldots$) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел:**

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\sqrt[n]{ab} = x$, $\sqrt[n]{a} = y$, $\sqrt[n]{b} = z$. Нам надо доказать, что для неотрицательных чисел x, y, z выполняется равенство $x = yz$.

Так как $\sqrt[n]{ab} = x$, то $x^n = ab$. Так как $\sqrt[n]{a} = y$, то $y^n = a$. Так как $\sqrt[n]{b} = z$, то $z^n = b$.

Итак, $x^n = ab$, $y^n = a$, $z^n = b$, а тогда $x^n = y^n z^n$, т. е. $x^n = (yz)^n$. Но если степени двух неотрицательных чисел равны и показатели степеней равны, то равны и основания степеней; значит, из равенства $x^n = (yz)^n$ следует, что $x = yz$, а это и требовалось доказать. ●

Приведем краткую запись доказательства теоремы.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{ab}=x$ $\sqrt[n]{a}=y$ $\sqrt[n]{b}=z$	$x^n=ab$ $y^n=a$ $z^n=b$	$x^n=y^n z^n$ $x^n=(yz)^n$ $x=yz$
Доказать: $x=yz$		

Замечания:

1. Теорема остается справедливой и для случая, когда подкоренное выражение представляет собой произведение более чем двух неотрицательных чисел.

2. Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если... то» (как это принято для теорем в математике). Приведем соответствующую формулировку: *если a и b — неотрицательные числа, то справедливо равенство* $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. **Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Краткая (хотя и неточная) формулировка, которую удобнее использовать на практике: *корень частного равен частному корней.*

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства теоремы 2, а вы попробуйте сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=x$ $\sqrt[n]{a}=y$ $\sqrt[n]{b}=z$	$x^n=\frac{a}{b}$ $y^n=a$ $z^n=b$	$x^n=\frac{y^n}{z^n}$ $x^n=\left(\frac{y}{z}\right)^n$ $x=\frac{y}{z}$
Доказать: $x=\frac{y}{z}$		

Вы, наверное, обратили внимание на то, что доказанные два свойства корней n-й степени представляют собой обобщение известных вам из курса алгебры 8-го класса свойств квадратных корней. И если бы других свойств корней n-й степени не было, то все было бы просто (и не очень интересно). На самом деле есть еще несколько интересных и важных свойств, которые мы обсудим в этом параграфе. Но сначала рассмотрим примеры, в которых применяются теоремы 1 и 2.

Пример 1. Вычислить: $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$.

Решение. Воспользовавшись первым свойством корней (теорема 1), получим:

$$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Замечание 3. Можно, конечно, этот пример решить по-другому, особенно если у вас под рукой есть микрокалькулятор: перемножить числа 125, 64 и 27, а затем извлечь кубический корень из полученного произведения. Но, согласитесь, данное выше решение «интеллигентнее».

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Решение. Обратим смешанное число $5\frac{1}{16}$ в неправильную дробь: $5\frac{1}{16} = 5 + \frac{1}{16} = \frac{81}{16}$. Воспользовавшись вторым свойством корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} =$
$= 2 \cdot 3 = 6.$

б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96 : 3} = \sqrt[5]{32} = 2.$

Пример 4. Выполнить действия:

а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b}$; б) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a \cdot b \cdot b} = \sqrt[4]{ab^2}$.

б) Теорема 1 позволяет нам перемножать только корни одинаковой степени, т. е. только корни с одинаковым показателем. Здесь же предлагается умножить корень 2-й степени из числа a на корень 3-й степени из того же числа. Как это делать, мы пока не знаем. Вернемся к этому примеру позднее.

Продолжим изучение свойств радикалов.

***Теорема 3*. Если $a > 0$, k — натуральное число и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Иными словами, *чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.*

Это следствие теоремы 1. В самом деле, например, для $k = 3$ получаем: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^3 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[n]{a^3}$. Точно так же можно рассуждать в случае любого другого натурального значения показателя k. ●

***Теорема 4*. Если $a > 0$ и n, k — натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство**

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Иными словами, *чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.*

Например, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt{a}} = \sqrt[10]{a}$; $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

Доказательство. Как и в теореме 2, приведем краткую запись доказательства, а вы попробуйте самостоятельно сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$ $\sqrt[nk]{a} = y$	$x^n = \sqrt[k]{a}$ $(x^n)^k = a$ $y^{nk} = a$	$(x^n)^k = y^{nk}$ $x^{nk} = y^{nk}$ $x = y$
Доказать: $x = y$		

Замечание 4. Чему мы научились благодаря доказанным теоремам? Мы узнали, что над корнями можно осуществлять четыре операции: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня (из корня). А как обстоит дело со сложением и вычитанием корней? Никак. Об этом мы говорили еще в 8-м классе по поводу операции извлечения квадратного корня. Например, вместо $\sqrt[3]{8+27}$ нельзя написать $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$. В самом деле, $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35}$, а $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$. Но ведь очевидно, что $\sqrt[3]{35} \neq 5$. Будьте внимательны!

Самое, пожалуй, интересное свойство корней — это то, о котором пойдет речь в следующей теореме.

Теорема 5. **Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:**

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}. \tag{1}$$

Например:

$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 4);

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 3);

$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a^4}$ (показатели корня и подкоренного выражения умножили на 2).

Доказательство. Обозначим левую часть равенства (1) буквой x: $\sqrt[np]{a^{kp}} = x$. Тогда, по определению корня, должно выполняться равенство

$$x^{np} = a^{kp}. \tag{2}$$

Обозначим правую часть равенства (1) буквой y: $\sqrt[n]{a^k} = y$. Тогда, по определению корня, должно выполняться равенство $y^n = a^k$.

Возведем обе части последнего равенства в одну и ту же степень p; получим:

$$y^{np} = a^{kp}. \tag{3}$$

Итак (см. равенства (2) и (3)),

$$x^{np} = a^{kp}, \quad y^{np} = a^{kp}.$$

Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что $x^{np} = y^{np}$, а значит, $x = y$, что и требовалось доказать. ●

Доказанная теорема позволит нам решить ту проблему, с которой мы столкнулись выше при решении примера 4б, где требовалось выполнить умножение корней с разными показателями:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Вот как обычно рассуждают в подобных случаях.

1) По теореме 5 в выражении $\sqrt{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 2), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 3; получим:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}.$$

2) По теореме 5 в выражении $\sqrt[3]{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 3), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 2; получим:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}.$$

3) Поскольку получили корни одной и той же 6-й степени, их можно перемножить:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Замечание 5. Вы не забыли, что все свойства корней, которые мы обсуждали в этом параграфе, рассмотрены нами только для случая, когда переменные принимают лишь неотрицательные значения? Почему пришлось сделать такое ограничение? Потому что корень n-й степени из отрицательного числа не всегда имеет смысл — он определен только для нечетных значений n. Для таких значений показателя корня рассмотренные свойства корней верны и в случае отрицательных подкоренных выражений.

§ 36. Преобразование выражений, содержащих радикалы

В предыдущих параграфах мы познакомились с операцией извлечения корня n-й степени из действительного числа, изучили свойства этой операции, а именно (для неотрицательных значений a и b):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \quad \left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a; \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \tag{2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \tag{3}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \tag{5}$$

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}. \tag{6}$$

Используя эти формулы, можно осуществлять преобразования выражений, содержащих операцию извлечения корня (выражений с радикалами), — такие выражения называют *иррациональными*. Рассмотрим несколько примеров на преобразования иррациональных выражений.

Пример 1. Упростить выражения:

а) $\sqrt[4]{32a^5}$;   б) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5$.

Р е ш е н и е. а) Представим подкоренное выражение $32a^5$ в виде $16 \cdot a^4 \cdot 2a$ и воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[4]{32a^5} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{2a} = 2a\sqrt[4]{2a}.$$

Полученное выражение считается более простым, чем заданное, поскольку под знаком корня содержится более простое выражение. Подобное преобразование называют *вынесением множителя за знак радикала.*

б) Воспользовавшись формулой (4), получим:

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5 = \sqrt[3]{\left(a^2\right)^5} = \sqrt[3]{a^{10}}.$$

Представим подкоренное выражение a^{10} в виде $a^9 \cdot a$ и воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Как видите, и здесь удалось вынести множитель за знак радикала.

Вспомните формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, которую вы изучали в курсе алгебры 8-го класса. Она обобщается на случай любого четного показателя корня:

$$\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.}$$

Эту формулу следует иметь в виду в тех случаях, когда нет уверенности в том, что переменные принимают только неотрицательные значения. Например, вынося множитель за знак корня в выражении $\sqrt[4]{x^4y}$, следует (если о знаке числа x ничего не известно) рассуждать так:

$$\sqrt[4]{x^4y} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y} = |x| \cdot \sqrt[4]{y}.$$

Наряду с вынесением множителя за знак радикала используется и противоположное преобразование: *внесение множителя под знак радикала.* Это преобразование мы используем в следующих двух примерах.

Пример 2. Сравнить числа $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$.

Решение. Имеем: $2 = \sqrt[3]{8}$; $3 = \sqrt[3]{27}$. Значит,

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{24};$$

$$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}.$$

Ясно, что $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{54}$, т. е. $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$. ◁■

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Сначала внесем множитель x^2 под знак корня 3-й степени:

$$x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{x^7}.$$

Теперь заданное выражение можно записать так: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}$.

Воспользовавшись формулой (5), мы можем последнее выражение записать в виде $\sqrt[12]{x^7}$.

Итак, $\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{x^7}$. ◁■

Пример 4. Выполнить действия:

а) $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})$;

б) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

Решение. а) Здесь можно применить формулу разности квадратов:

$$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = (\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2 = \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{b^2}.$$

Воспользовавшись формулой (6), разделим в каждом из полученных радикалов показатели корня и подкоренного выражения на 2, что существенно упростит запись: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Итак, $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

б) Здесь можно применить формулу разности кубов:

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b.$$ ◁■

Пример 5. Выполнить действия:

а) $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}}$; б) $\sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[4]{4\sqrt{5}+9}$.

Решение. а) Поскольку перемножать можно корни только одной и той же степени, начнем с уравнивания показателей у имеющихся радикалов. Для этого дважды воспользуемся формулой (6):

$$\sqrt[8]{x^3} = \sqrt[8\cdot 3]{x^{3\cdot 3}} = \sqrt[24]{x^9}; \quad \sqrt[12]{x^{11}} = \sqrt[12\cdot 2]{x^{11\cdot 2}} = \sqrt[24]{x^{22}}.$$

А теперь воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[24]{x^9} \cdot \sqrt[24]{x^{22}} = \sqrt[24]{x^9 \cdot x^{22}} = \sqrt[24]{x^{31}}.$$

Осталось вынести множитель за знак радикала:

$$\sqrt[24]{x^{31}} = \sqrt[24]{x^{24} \cdot x^7} = \sqrt[24]{x^{24}} \cdot \sqrt[24]{x^7} = |x|\sqrt[24]{x^7}.$$

В условии примера содержатся выражения $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[12]{x^{11}}$. Значит, предполагается, что $x \geqslant 0$ (при $x < 0$ в обоих случаях под знаком корня четной степени будет отрицательное число). Но тогда $|x| = x$ и, следовательно, $|x|\sqrt[24]{x^7} = x\sqrt[24]{x^7}$.

б) Первый способ. Преобразуем первый множитель так, чтобы получился корень 4-й степени:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{5} + 2^2} =$$

$$= \sqrt[4]{5 - 4\sqrt{5} + 4} = \sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}}.$$

Теперь нетрудно выполнить умножение радикалов:

$$\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\left(9-4\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \sqrt[4]{9^2 - \left(4\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt[4]{81-80} = 1.$$

Второй способ. Сначала поработаем с подкоренным выражением во втором множителе:

$$9 + 4\sqrt{5} = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\cdot 2\cdot\sqrt{5} + 2^2 = \left(\sqrt{5}+2\right)^2.$$

Значит, $\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}$. Разделив показатели корня и подкоренного выражения на 2, получим: $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ (формулой (6) мы здесь имеем право пользоваться, поскольку подкоренное выражение $\sqrt{5}+2$ — положительное число). Осталось выполнить умножение квадратных корней:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+2}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{5-4}=1.$$

Ответ: а) $x^2\sqrt[4]{x^7}$; б) 1.

Пример 6. Разложить на множители выражение

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}.$$

Решение. Заданное выражение можно переписать следующим образом:

$$\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^2-2\sqrt[5]{x^2}\cdot2\sqrt[5]{y}+\left(2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Теперь видно, что это полный квадрат — квадрат разности выражений $\sqrt[5]{x^2}$ и $2\sqrt[5]{y}$. Значит,

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}=\left(\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Пример 7. Сократить дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

Решение. Первый способ. Знаменатель дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}=$$
$$=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-2\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}+\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2.$$

В числителе получаем:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Теперь выполним сокращение заданной дроби:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

Второй способ. Введем новые переменные: $\sqrt[4]{x}=a$, $\sqrt[4]{y}=b$; учтем, что при этом $\sqrt{x}=a^2$, $\sqrt{y}=b^2$. Тогда заданная дробь примет вид

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

Что дала нам замена переменных? Она позволила заменить иррациональное выражение (с переменными x и y) рациональным выражением (с переменными a и b). А оперировать с рациональными выражениями намного проще, чем с иррациональными. Имеем:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a - b)^2} = \frac{a + b}{a - b} = \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}.$$

§ 37. Обобщение понятия о показателе степени

Вы умеете вычислять значение степени с любым целочисленным показателем, руководствуясь при этом следующими определениями:

1) если $n = 1$, то $a^1 = a$;

2) если $n = 0$ и $a \neq 0$, то $a^0 = 1$;

3) если $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n множителей);

4) если $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ и $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

В этом параграфе мы обсудим, какой смысл придается в математике понятию степени с дробным показателем, т. е. выясним, что означают такие символы математического языка, как $2^{\frac{3}{5}}$, $3^{-0,3}$ и т. д.

Зададимся вопросом: если вводить символ $2^{\frac{3}{5}}$, то каким математическим содержанием его наполнить? Хорошо бы, рассуждали математики, чтобы сохранялись привычные свойства степеней, например, чтобы при возведении степени в степень показатели перемножались, в частности, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 2^3 \qquad (1)$$

(поскольку $\frac{3}{5} \cdot 5 = 3$). Пусть $a = 2^{\frac{3}{5}}$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде $a^5 = 2^3$, откуда получаем: $a = \sqrt[5]{2^3}$. Значит, появилось основание определить $2^{\frac{3}{5}}$ как $\sqrt[5]{2^3}$. Вероятно, подобные соображения и привели математиков к следующему определению.

Определение 1. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a \geqslant 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},\ a \geqslant 0.}$$

Например, $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$ и т. д.

Это определение оказалось удивительно удачным. При нем сохранились *все* привычные свойства степеней, которые были доказаны для натуральных показателей: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются и т. д. Пусть, например, нам нужно выполнить умножение $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$. Поскольку $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, то задача сводится к умножению радикалов:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}.$$

Итак, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$. Но, между прочим, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, т. е. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$.

Поскольку складывать дроби легче, чем применять свойства радикалов, на практике предпочитают заменять радикалы степенями с дробными показателями. Для иллюстрации этого положения вернемся к примеру 5а из § 36: $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}}$. Если перейти к дробным показателям, то получим:

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}.$$

Видите, насколько быстрее и проще мы получили здесь тот же результат, что и в § 36.

Пример 1. Вычислить:

а) $64^{\frac{1}{6}}$; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $0^{\frac{51}{4}}$; г) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. а) $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

б) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$.

в) $0^{\frac{51}{4}} = \sqrt[4]{0^{51}} = \sqrt[4]{0} = 0$.

г) Это задание некорректно, поскольку нет определения степени с дробным показателем для случая *отрицательного* основания. По определению 1 возводить в дробные степени можно *только неотрицательные числа*. Так что запись вида $(-8)^{\frac{1}{3}}$ считается в математике лишенной смысла. ◀■

Замечание. Иногда приходится слышать возражения: неверно, что запись $(-8)^{\frac{1}{3}}$ лишена смысла, ведь $\sqrt[3]{-8} = -2$ — верное равенство. Так почему бы не считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$? Если бы математики не запретили себе возводить в дробные степени отрицательные числа, то вот, например, с какой неприятностью пришлось бы столкнуться:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Получилось «равенство» $-2 = 2$. Выбирая определения, математики как раз и заботятся о том, чтобы все было точно, определенно, недвусмысленно. Поэтому в определении степени с нулевым показателем a^0 появилось ограничение $a \neq 0$, а в определении степени с положительным дробным показателем $a^{\frac{p}{q}}$ появилось ограничение $a \geqslant 0$.

Определение 2. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$:

$$\boxed{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, \quad a > 0.}$$

Например, $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^5}}$ и т. д.

Итак, теперь мы знаем, что такое степень с любым рациональным показателем. Справедливы следующие свойства (мы считаем, что $a > 0$, $b > 0$, s и t — произвольные рациональные числа):

1) $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;

2) $a^s : a^t = a^{s-t}$;

3) $(a^s)^t = a^{st}$;

4) $(ab)^s = a^s \cdot b^s$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Частичные обоснования указанных свойств были сделаны выше, этим мы и ограничимся.

Пример 2. Упростить выражение

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2-2\sqrt[3]{xy}-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}.$$

Решение.

1) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}};$

2) $\sqrt[3]{xy}=(xy)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}};$

3) $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}=\left(\sqrt[3]{y}\right)^2=\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2=y^{\frac{2}{3}};$

4) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}.$

Ответ: $x^{\frac{2}{3}}$.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{x^2}=1;$ б) $x^{\frac{2}{3}}=1.$

Решение. а) Возведя обе части уравнения в куб, получим:

$$x^2=1;$$
$$x=\pm1.$$

б) Это практически то же самое уравнение, что и в пункте а), но с одной существенной оговоркой: поскольку переменная x возводится в дробную степень, она по определению должна принимать только неотрицательные значения. Значит, из найденных выше двух значений x в качестве корня уравнения мы имеем право взять лишь значение $x = 1$.

Ответ: а) ±1; б) 1.

Пример 4. Решить уравнение $x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}-8=0.$

Решение. Введем новую переменную $y=x^{-\frac{1}{3}}$. Тогда $x^{-\frac{2}{3}}=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2=y^2$. Получаем квадратное уравнение относительно новой переменной y

$$y^2-2y-8=0.$$

Решим это уравнение: $y_1 = -2$, $y_2 = 4$.

Теперь задача сводится к решению двух уравнений:

$$x^{-\frac{1}{3}} = -2; \quad x^{-\frac{1}{3}} = 4.$$

Первое уравнение не имеет корней, поскольку (напомним еще раз) область допустимых значений для переменной x в подобных случаях определяется условием $x > 0$, а тогда и $x^{-\frac{1}{3}} > 0$. Решая второе уравнение, последовательно находим:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 4; \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}; \quad \sqrt[3]{x} = \frac{1}{4};$$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)^3; \quad x = \frac{1}{64}.$$

Ответ: $\frac{1}{64}$.

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или возводится в дробную степень, называют *иррациональными*. Первое знакомство с иррациональными уравнениями состоялось у вас в курсе алгебры для 8-го класса, где встречались уравнения, содержащие переменную под знаком квадратного корня. В этой главе мы рассмотрели еще несколько примеров решения иррациональных уравнений — пример 2 из § 33, пример 2 из § 34 и примеры 3, 4 из § 37.

Назовем основные методы решения иррациональных уравнений:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) метод введения новых переменных;

3) функционально-графический метод.

Если используется метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень, то возможно появление посторонних корней, значит, обязательна проверка всех найденных решений — об этом мы говорили и раньше, в курсе алгебры для 8-го класса.

Более подробно об иррациональных уравнениях мы поговорим в главе 10.

§ 38. Степенные функции, их свойства и графики

Обычно *степенными функциями* называют функции вида $y = x^r$, где r — любое действительное число. В этом параграфе мы ограничимся случаем рационального показателя r.

Целый ряд таких функций мы с вами уже изучили. Так, если r — натуральное число ($r = n$), то получаем функцию $y = x^n$;

графики и свойства таких функций вам известны из курса алгебры 7—9-го классов. На рисунке 174 изображен график функции $y = x^1$ (прямая), на рисунке 175 изображен график функции $y = x^2$ (парабола), на рисунке 176 изображен график функции $y = x^3$ (кубическая парабола). График степенной функции $y = x^n$ в случае четного n ($n = 4, 6, 8, \ldots$) похож на параболу, а график степенной функции $y = x^n$ в случае нечетного n ($n = 5, 7, 9, \ldots$) похож на кубическую параболу.

Если $r = -n$, то получаем функцию $y = x^{-n}$, т. е. $y = \frac{1}{x^n}$; о таких функциях мы говорили в курсе алгебры 9-го класса. В случае четного n график имеет вид, изображенный на рисунке 177; в случае нечетного n график имеет вид, изображенный на рисунке 178.

Наконец, если $r = 0$, то речь идет о функции $y = x^0$, или, что то же самое, $y = 1$, где $x \neq 0$; график этой функции изображен на рисунке 179.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{\frac{m}{n}}$ для случая, когда $\frac{m}{n} > 1$. Возьмем в качестве примера функцию $y = x^{2,5}$. Область ее

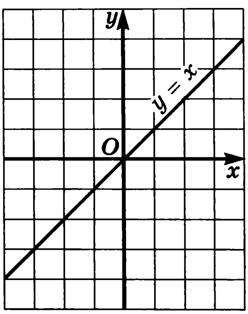


Рис. 174

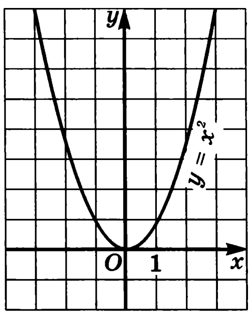


Рис. 175

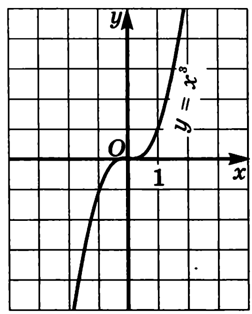


Рис. 176

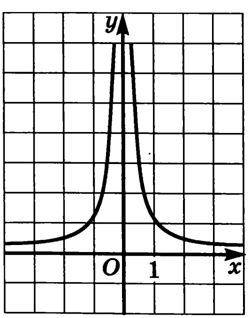


Рис. 177

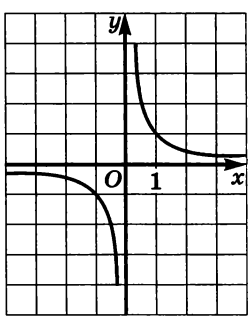


Рис. 178

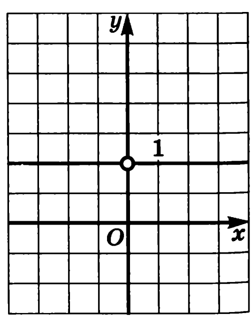


Рис. 179

определения — луч $[0; +\infty)$. Построим на этом луче графики функций $y = x^2$ (ветвь параболы) и $y = x^3$ (ветвь кубической параболы) — они изображены на рисунке 180. Отметим, что на интервале $(0; 1)$ кубическая парабола располагается ниже, а на открытом луче $(1; +\infty)$ — выше параболы.

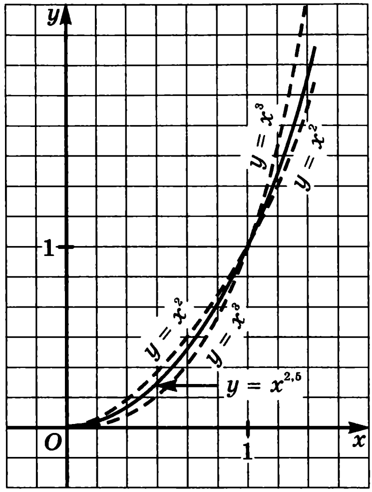


Рис. 180

Нетрудно убедиться в том, что график функции $y = x^{2,5}$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$, как и графики функций $y = x^2$, $y = x^3$. При остальных значениях аргумента x график функции $y = x^{2,5}$ находится между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$ (рис. 180). Почему? Смотрите.

1) Если $0 < x < 1$, то

$$x^6 < x^5 < x^4;$$

$$\sqrt{x^6} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^4};$$

$$x^3 < x^{2,5} < x^2.$$

2) Если $x > 1$, то

$$x^4 < x^5 < x^6;$$

$$\sqrt{x^4} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^6};$$

$$x^2 < x^{2,5} < x^3.$$

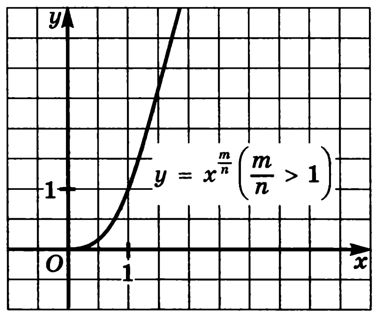


Рис. 181

График функции $y = x^{2,5}$ напоминает ветвь параболы. Примерно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^r$, где $r = \frac{m}{n}$ — неправильная дробь (числитель больше знаменателя). Ее графиком является кривая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$ и похожая на ветвь параболы (рис. 181). Чем больше показатель r, тем «круче» устремлена эта кривая вверх.

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет наибольшего значения, а $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{\frac{1}{n}}$. Это известная нам функция $y = \sqrt[n]{x}$, где $x \geqslant 0$, ее график изображен на рис. 157. Точно так же выглядит график любой степенной функции $y = x^r$, где $r = \frac{m}{n}$ — правильная дробь (числитель меньше знаменателя). График функции $y = x^r$ изображен на рисунке 182.

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения, а $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Нам осталось рассмотреть степенную функцию вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$. Область ее определения — открытый луч $(0; +\infty)$. Выше мы построили график степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. При $x > 0$ график функции $y = x^{-n}$ похож на ветвь гиперболы (рис. 170). Точно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$, ее график изображен на рисунке 183. Отметим, что график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

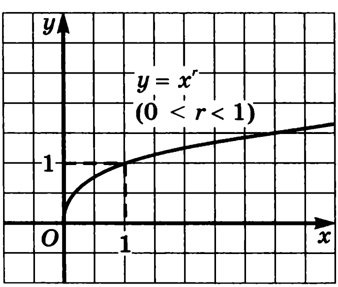


Рис. 182

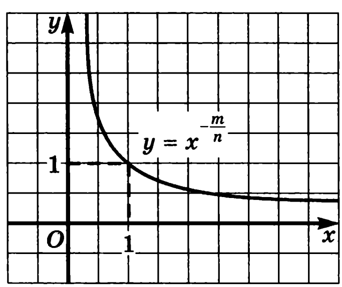


Рис. 183

Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) убывает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Вы, наверное, заметили, что мы пока ничего не сказали о свойстве дифференцируемости степенной функции. Начнем издалека.

Мы знаем, чему равна производная функции $y = x^n$, где n — натуральное число:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

Нетрудно найти производную степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. Для этого надо переписать выражение x^{-n} в виде $\frac{1}{x^n}$ и воспользоваться правилом дифференцирования дроби:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \tag{3}$$

где m — любое целое число.

Идем дальше. Мы знаем, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Эту формулу можно записать следующим образом:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

И формула (3), и формула (4) являются частными случаями общего утверждения (которое мы приводим без доказательства).

***Теорема.* Если $x > 0$ и r — любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле**

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}.}$$

Например,

$$(x^{1000})' = 1000x^{999}; \quad (x^{-5})' = -5x^{-6}; \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

(мы учли, что $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$);

$$\left(\sqrt[5]{(3x-4)^3}\right)' = \left((3x-4)^{\frac{3}{5}}\right)' = 3 \cdot \frac{3}{5}(3x-4)^{\frac{3}{5}-1} = \frac{9}{5}(3x-4)^{-\frac{2}{5}}$$

(мы использовали правило дифференцирования: $(f(ax+b))' = a \cdot f'(ax+b)$).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{3}{2}}$:

а) на отрезке $[1; 9]$;

б) на интервале $(0; 4)$;

в) на луче $[25; +\infty)$.

Решение. Можно воспользоваться тем, что функция $y = x^{\frac{3}{2}}$ возрастает на любом из указанных промежутков и, следовательно, свои наименьшее и наибольшее значения достигает соответственно в левом и правом концах промежутка, если, разумеется, концы промежутка принадлежат самому промежутку.

а) $y_{\text{наим}} = 1^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1^3} = 1$; $\quad y_{\text{наиб}} = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$.

б) Здесь нет ни наименьшего, ни наибольшего значения функции, поскольку концы промежутка — точки 0 и 4 — интервалу $(0; 4)$ не принадлежат.

в) $y_{\text{наим}} = 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$; $y_{\text{наиб}}$ не существует. ■

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3$ на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке (см. § 32).

1) Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 8\sqrt{x} - x^2.$$

2) Производная существует при всех $x \geqslant 0$, значит, критических точек у функции нет. Стационарные точки найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$8\sqrt{x} - x^2 = 0;$$

$$8\sqrt{x} = x^2;$$

$$\left(8\sqrt{x}\right)^2 = (x^2)^2;$$

$$64x = x^4;$$

$$x(x^3 - 64) = 0;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Отрезку [1; 9] принадлежит лишь точка $x = 4$.

3) Составим таблицу значений функции $y = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3$, включив в нее концы отрезка — точки $x = 1$ и $x = 9$ — и найденную стационарную точку $x = 4$:

x	1	4	9
y	5	$21\frac{1}{3}$	-99

Таким образом, $y_{\text{наим}} = -99$ (достигается в точке $x = 9$);

$y_{\text{наиб}} = 21\frac{1}{3}$ (достигается в точке $x = 4$). ◀

Пример 3. Решить уравнение $x^{\frac{2}{3}} = 12 - x$.

Решение. Нетрудно подобрать один корень этого уравнения: $x = 8$. В самом деле,

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4 \text{ и } 12 - 8 = 4,$$

значит, при $x = 4$ уравнение обращается в верное числовое равенство $4 = 4$.

Так как степенная функция $y = x^{\frac{2}{3}}$ возрастает, а линейная функция $y = 12 - x$ убывает, то других корней у уравнения нет (см. с. 206).

Ответ: 8.

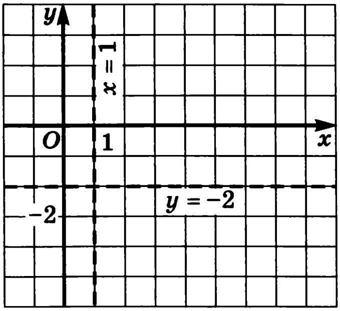


Рис. 184

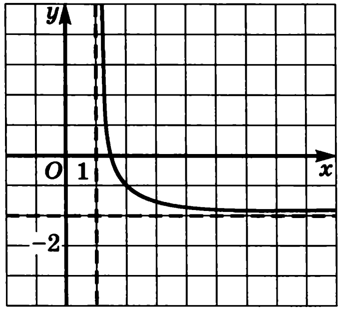


Рис. 185

Пример 4. Построить график функции $y = (x-1)^{-\frac{2}{3}} - 2$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке (1; −2) — пунктирные прямые $x = 1$ и $y = -2$ (рис. 184).

2) «Привяжем» функцию $y = x^{-\frac{2}{3}}$ к новой системе координат, т. е. в новой системе координат построим кривую того вида, какой представлен на рисунке 183. Это и будет требуемый график (рис. 185). ◁■

Пример 5. Составить уравнение касательной к графику функции:

а) $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$; б) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ в точке $x = 1$.

Решение. Напомним общий вид уравнения касательной:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (5)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной (см. § 29).

а) Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то:

1) $a = 1$;

2) $f(a) = f(1) = 1$;

3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$;

4) подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ в формулу (5):

$$y = 1 - (x - 1);$$
$$y = 2 - x.$$

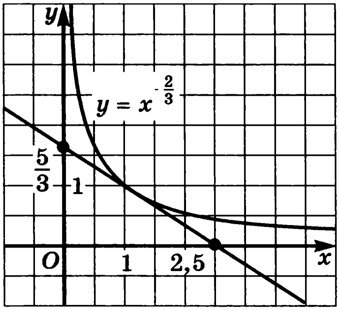


Рис. 186

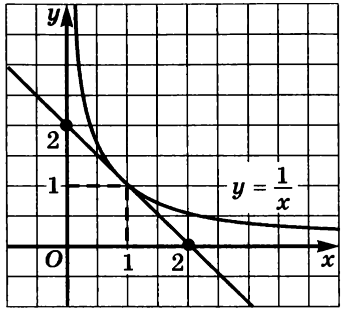


Рис. 187

б) Если $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, то:

1) $a = 1$;

2) $f(a) = f(1) = 1^{-\frac{2}{3}} = 1$;

3) $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{2}{3}$;

4) подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -\frac{2}{3}$ в формулу (5):

$$y = 1 - \frac{2}{3}(x - 1);$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Ответ: а) $y = 2 - x$; б) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Замечание. График функции $y = x^{-\frac{2}{3}}$ похож на ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$: оба графика имеют своими асимптотами оси координат, оба графика проходят через точку (1; 1). Но разумеется, это разные графики. Так, их поведение в точке (1; 1) различно, у них, как мы увидели при решении примера 5, разные касательные в этой точке (см. рис. 186, 187).

ГЛАВА 7 Показательная и логарифмическая функции

§ 39. Показательная функция, ее свойства и график

Рассмотрим выражение 2^x и найдем его значения при различных рациональных значениях переменной x, например при $x = 2$; 5; 0; -4; $\frac{4}{3}$; $-3{,}5$:

если $x = 2$, то $2^x = 2^2 = 4$;
если $x = 5$, то $2^x = 2^5 = 32$;
если $x = 0$, то $2^x = 2^0 = 1$;

если $x = -4$, то $2^x = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;

если $x = \frac{4}{3}$, то $2^x = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$;

если $x = -3{,}5$, то $2^x = 2^{-3{,}5} = \frac{1}{2^{3{,}5}} = \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

Вообще, какое бы рациональное значение мы ни придали переменной x, всегда можно вычислить соответствующее числовое значение выражения 2^x. Таким образом, можно говорить о *показательной функции* $y = 2^x$, *определенной на множестве* Q *рациональных чисел*:

$$y = 2^x,\ x \in Q.$$

Вероятно, у вас возник вопрос: почему мы рассматриваем функцию $y = 2^x$ только на множестве рациональных чисел, почему мы не рассматриваем ее, как другие известные функции, на всей числовой прямой или на каком-либо сплошном промежутке числовой прямой? Что нам мешает? Обдумаем ситуацию.

Числовая прямая содержит не только рациональные, но и иррациональные числа. Для изученных ранее функций это нас не смущало. Например, значения функции $y = x^2$ мы одинаково легко находили как при рациональных, так и при иррациональных значениях x: достаточно было заданное значение x возвести в квадрат.

А вот с функцией $y = 2^x$ дело обстоит сложнее. Если аргументу x придать рациональное значение, то в принципе 2^x вычислить можно (вернитесь еще раз к началу параграфа, где именно это мы и делали). А если аргументу x придать иррациональное значение? Как, например, вычислить $2^{\sqrt{3}}$? Этого мы пока не знаем.

Математики нашли выход из положения; вот как они рассуждали.

Известно, что $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ Рассмотрим последовательность рациональных чисел — десятичных приближений числа $\sqrt{3}$ по недостатку:

1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; 1,732050; 1,7320508; ... .

Ясно, что $1{,}732 = 1{,}7320$, а $1{,}732050 = 1{,}73205$. Во избежание подобных повторов отбросим те члены последовательности, которые заканчиваются цифрой 0. Тогда получим возрастающую последовательность

$$1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}73205;\ 1{,}7320508;\ \ldots .$$

Соответственно возрастает и последовательность

$$2^1;\ 2^{1{,}7};\ 2^{1{,}73};\ 2^{1{,}732};\ 2^{1{,}73205};\ 2^{1{,}7320508},\ \ldots . \qquad (1)$$

Как в этом убедиться? Возьмем, например, два соседних члена последовательности $2^{1{,}7}$ и $2^{1{,}73}$. Перепишем их так:

$$2^{1{,}7} = 2^{\frac{170}{100}} = \sqrt[100]{2^{170}}\ ;\ 2^{1{,}73} = 2^{\frac{173}{100}} = \sqrt[100]{2^{173}}\ .$$

Поскольку $2^{170} < 2^{173}$, то $\sqrt[100]{2^{170}} < \sqrt[100]{2^{173}}$, а это и означает, что $2^{1{,}7} < 2^{1{,}73}$.

Все члены последовательности (1) — положительные числа, меньшие, чем 2^2, т. е. эта последовательность ограниченная. По теореме Вейерштрасса (см. § 24), если последовательность возрастает и ограничена, то она имеет предел. Этот предел принято считать значением числового выражения $2^{\sqrt{3}}$. И неважно, что найти даже приближенное значение числового выражения $2^{\sqrt{3}}$ очень трудно, важно, что это — конкретное число (в конце концов, мы же не боялись говорить, что, например, $x = \sqrt{17} - \sqrt{13}$ — корень рационального уравнения, а $x = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ — корень тригонометрического уравнения, не особенно задумываясь над тем, а что же это конкретно за числа $\sqrt{17} - \sqrt{13}$ или $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$).

Итак, мы выяснили, какой смысл вкладывают математики в символ $2^{\sqrt{3}}$. Аналогично можно определить, что такое $2^{\sqrt{5}}$, $3^{\sqrt[4]{2}}$, $2{,}5^{\pi}$ и т. д.

Определение 1. Пусть $a > 1$ и $\alpha = a{,}a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$ — положительное иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). Составим последовательность десятичных приближений числа α по недостатку:
$\alpha_1 = a{,}a_1$, $\alpha_2 = a{,}a_1a_2$, $\alpha_3 = a{,}a_1a_2a_3$, ..., $\alpha_n = a{,}a_1a_2a_3 \ldots a_n$, ...
Тогда предел последовательности a^{α_1}, a^{α_2}, a^{α_3}, ..., a^{α_n}, ... обозначают a^α и называют **степенью с иррациональным показателем.** Если $a > 1$ и $\alpha < 0$ — иррациональное число, то под a^α будем понимать число $\frac{1}{a^{-\alpha}}$. Если $0 < a < 1$, то под a^α будем понимать число $\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$.

Теперь мы можем говорить не только о степенях с произвольными рациональными показателями, но и *о степенях с произвольными действительными показателями*. Доказано, что степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются и т. д. Но самое главное, что теперь мы можем говорить о функции $y = a^x$, определенной на множестве всех действительных чисел.

Построим (по точкам) график функции $y = 2^x$. Для этого составим таблицу значений функции $y = 2^x$:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (1; 2), $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, (2; 4), $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$, (3; 8), $\left(-3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 188, *а*). Они намечают некоторую линию — это график функции $y = 2^x$ (рис. 188, *б*).

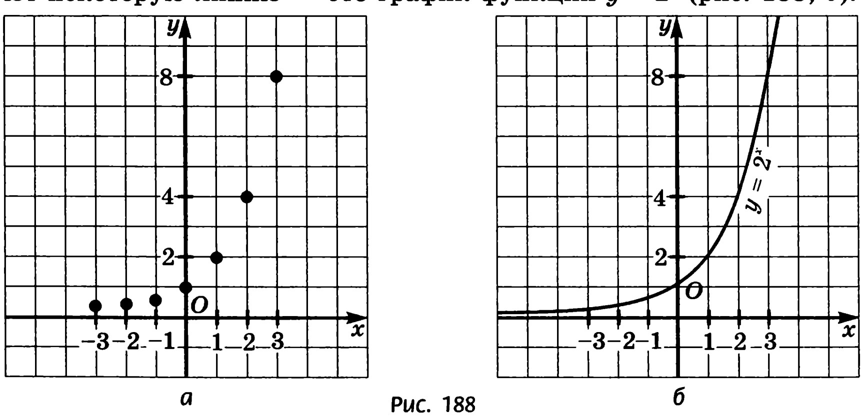


Рис. 188

Свойства функции $y = 2^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

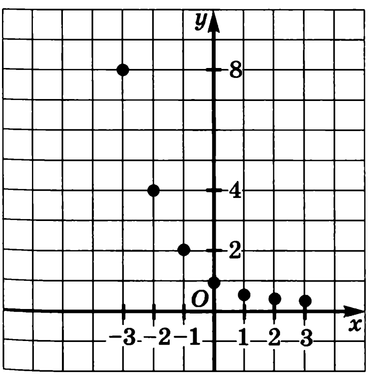
8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $a > 1$.

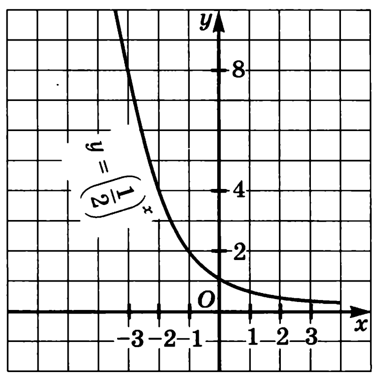
Рассмотрим теперь функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, составим для нее таблицу значений:

x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки $(0; 1)$, $(-1; 2)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $(-2; 4)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $(-3; 8)$, $\left(3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 189, *а*). Они намечают некоторую линию, проведем ее — это график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 189, *б*).



а



б

Рис. 189

Свойства функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) убывает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз.

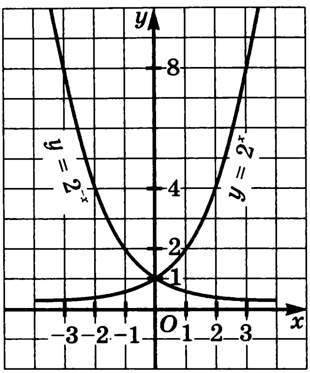


Рис. 190

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $0 < a < 1$.

Обратите внимание: графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, т. е. $y = 2^{-x}$, симметричны относительно оси y (рис. 190). Аналогично будут симметричны относительно оси y графики функций $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 5^x$ и $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ и $y = \left(\frac{7}{2}\right)^x$ и т. д.

Подводя итог сказанному, дадим определение показательной функции и выделим наиболее важные ее свойства.

Определение. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией.**

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Возрастает	Убывает
Непрерывна	Непрерывна

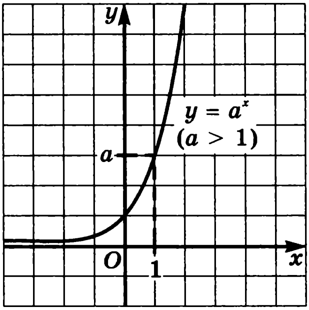


Рис. 191

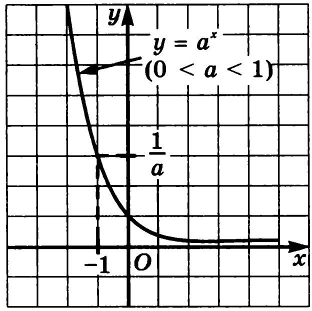


Рис. 192

График функции $y = a^x$ для $a > 1$ изображен на рисунке 191, а для $0 < a < 1$ — на рисунке 192.

Кривую, изображенную на рисунке 191 или 192, называют *экспонентой*. Впрочем, экспонентой называют и саму показательную функцию $y = a^x$. Так что термин «экспонента» используется в двух смыслах: и для наименования показательной функции, и для названия графика показательной функции.

Обратите внимание на геометрическую особенность графика показательной функции $y = a^x$: *ось x является горизонтальной асимптотой графика*. Правда, обычно это утверждение уточняют следующим образом: ось x является горизонтальной асимптотой графика функции $y = a^x$ при $x \to -\infty$, если $a > 1$ (см. рис. 191), и при $x \to +\infty$, если $0 < a < 1$ (см. рис. 192).

А встречаются ли показательные функции как математические модели реальных ситуаций, заданные на всей числовой прямой или на каком-либо числовом промежутке? Безусловно, и очень часто. Например, из физики известен закон радиоактивного распада вещества: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; здесь m_0 — первоначальная масса вещества, m — масса вещества в рассматриваемый момент времени t, T — некоторое положительное число (константа), свое для каждого вида радиоактивного вещества (это число обычно называют *периодом полураспада*). Как видите, указанный закон связан с показательной функцией, причем областью определения этой функции является множество всех неотрицательных чисел (аргумент t может принимать любые неотрицательные значения).

На рисунке 193 схематически представлен график функции $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

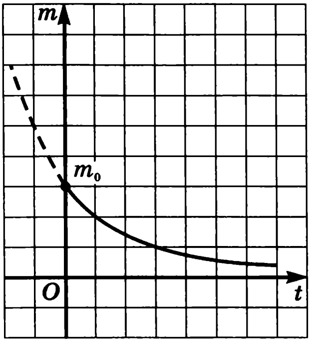


Рис. 193

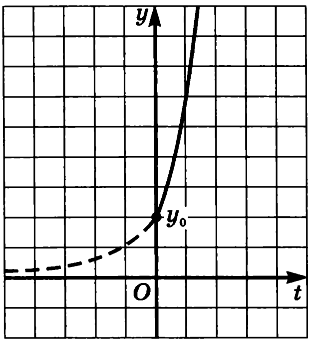


Рис. 194

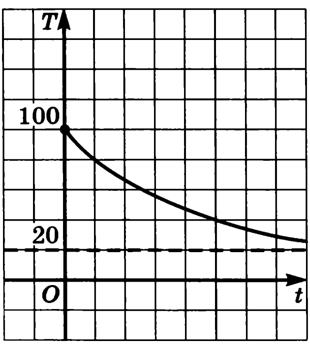


Рис. 195

С показательными функциями связаны многие экономические, биологические, физические законы, относящиеся, например, к изменению температуры тела, и т. д.

Приведем еще два примера.

1. Предположим, что колония живых организмов находится в благоприятных условиях: пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы не ограничены, а хищников, питающихся организмами данной колонии, нет, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность. В таких условиях обычно считают, что скорость изменения численности колонии пропорциональна численности (чем больше организмов, тем выше скорость; k — коэффициент пропорциональности). Установлено, что число организмов колонии выражается формулой $y = y_0e^{kt}$, где y_0 — численность колонии в момент времени $t = 0$, а e — особое число, примерно равное 2,7 (об этом числе речь пойдет в § 47). На рисунке 194 схематически представлен график функции $y = y_0e^{kt}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

Примерно по такому же закону изменяется величина вклада в банковской структуре, этот закон называют *законом показательного роста*.

2. В комнату с температурой 20° внесли кипящий чайник. При определенных условиях можно считать, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Температура T тела в момент времени t выражается формулой $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$; здесь T_1 — температура окружающей среды, а T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$. В ситуации с чайником $T_1 = 20$ °С, а $T_0 = 100$ °С. Значит, $T = 20 + 80e^{-kt}$. График этой функции схематически представлен на рисунке 195.

График наглядно иллюстрирует вполне понятное обстоятельство: с течением времени температура чайника приближается к температуре окружающей среды. Процессы подобного рода называют *процессами выравнивания*.

Замечание. Школьники часто путают термины: «степенная функция» и «показательная функция». Сравните:

$y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-10}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-2,5}$ — это примеры степенных функций;

$y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (2,5)^x$ — это примеры показательных функций.

Вообще $y = x^r$, где r — конкретное число, — *степенная функция* (аргумент x содержится в *основании степени*);

$y = a^x$, где a — конкретное число (положительное и отличное от 1), — *показательная функция* (аргумент x содержится в *показателе степени*).

А такую «экзотическую» функцию, как $y = x^x$, не считают ни показательной, ни степенной (ее иногда называют показательно-степенной).

Пример 1. Решить уравнения и неравенства:

а) $2^x = 1$; в) $2^x = 8$; д) $2^x > 1$;

б) $2^x = 4$; г) $2^x = \frac{1}{16}$; е) $2^x < 4$.

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y = 2^x$ и $y = 1$, замечаем (рис. 196), что они имеют одну общую точку (0; 1). Значит, уравнение $2^x = 1$ имеет единственный корень $x = 0$.

Итак, из уравнения $2^x = 2^0$ мы получили: $x = 0$.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y = 2^x$ и $y = 4$, замечаем (рис. 196), что они имеют одну общую точку (2; 4). Значит, уравнение $2^x = 4$ имеет единственный корень $x = 2$.

Итак, из уравнения $2^x = 2^2$ мы получили: $x = 2$.

в) и г) Исходя из тех же соображений, делаем вывод, что уравнение $2^x = 8$ имеет единственный корень, причем для его нахождения графики соответствующих функций можно и не строить; ясно, что $x = 3$, поскольку $2^3 = 8$. Аналогично находим единственный корень уравнения $2^x = \frac{1}{16}$; здесь $x = -4$, поскольку $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

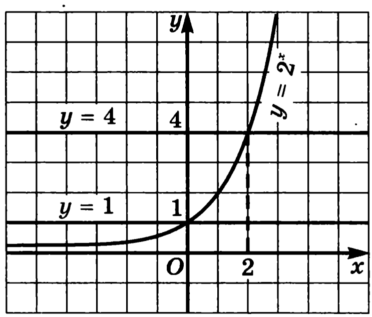


Рис. 196

Итак, из уравнения $2^x = 2^3$ мы получили: $x = 3$; из уравнения $2^x = 2^{-4}$ мы получили: $x = -4$.

д) График функции $y = 2^x$ расположен выше графика функции $y = 1$ при $x > 0$ — это хорошо читается по рисунку 196. Значит, решением неравенства $2^x > 1$ служит промежуток $(0; +\infty)$.

е) График функции $y = 2^x$ расположен ниже графика функции $y = 4$ при $x < 2$ — это хорошо читается по рисунку 196. Значит, решением неравенства $2^x < 4$ служит промежуток $(-\infty; 2)$.

Вы, наверное, заметили, что в основе всех выводов, сделанных при решении примера 1, лежало свойство монотонности (возрастания) функции $y = 2^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 1. **Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.**

Теорема 2. **Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$** (рис. 197); **неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.**

Пример 2. Решить уравнения и неравенства:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$; е) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$.

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 1$, замечаем (рис. 198), что они имеют одну

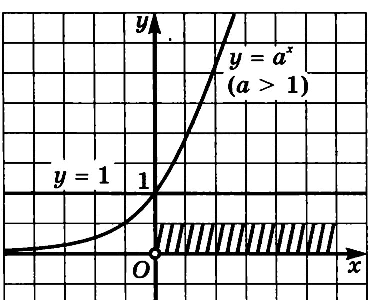


Рис. 197

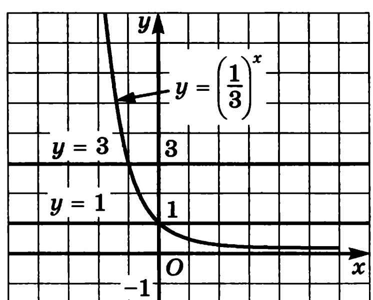


Рис. 198

общую точку (0; 1). Значит, уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ имеет единственный корень $x = 0$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ мы получили: $x = 0$.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 3$, замечаем (см. рис. 198), что они имеют одну общую точку $(-1; 3)$. Значит, уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$ имеет единственный корень $x = -1$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ мы получили: $x = -1$.

в), г) Исходя из тех же соображений, делаем вывод, что уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ имеет единственный корень, причем для его нахождения графики соответствующих функций можно и не строить; ясно, что $x = -2$, поскольку $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$. Аналогично находим единственный корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$; здесь $x = 2$, поскольку $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ мы получили: $x = -2$; из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ мы получили: $x = 2$.

д) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен выше графика функции $y = 1$ при $x < 0$ — это хорошо читается по рисунку 198. Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$ служит промежуток $(-\infty; 0)$.

е) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен ниже графика функции $y = 3$ при $x > -1$ — это хорошо читается по рисунку 198.

Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$ служит промежуток $(-1; +\infty)$.

В основе всех выводов, сделанных при решении примера 2, лежало свойство монотонности (убывания) функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

***Теорема 3*. Если $0 < a < 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.**

***Теорема 4*. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$** (рис. 199); **неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.**

Пример 3. Построить график функции $y = 3 \cdot 3^x + 2$ и найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Можно действовать так: построить график функции $y = 3^x$, осуществить его растяжение от оси x с коэффициентом 3, а затем полученный график поднять вверх на 2 единицы масштаба. Но удобнее воспользоваться тем, что $3 \cdot 3^x = 3^{x+1}$, и, следовательно, строить график функции $y = 3^{x+1} + 2$.

Перейдем, как неоднократно уже делали в подобных случаях, к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 2)$ — пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 2$ на рисунке 200. «Привяжем» функцию $y = 3^x$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = 3^x$: $(0; 1)$, $(1; 3)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, — но строить их будем не в старой, а в новой системе координат.

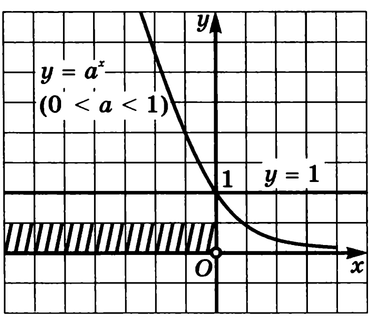


Рис. 199

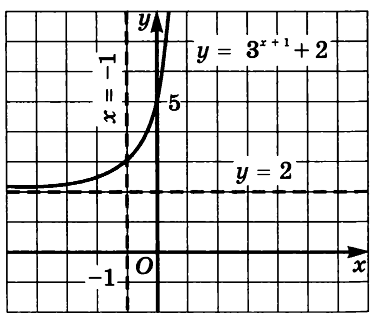


Рис. 200

Затем по точкам построим экспоненту — это и будет требуемый график (рис. 200).

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения заданной функции на отрезке [−2; 2], воспользуемся тем, что заданная функция возрастает, а потому свои наименьшее и наибольшее значения она принимает соответственно в левом и правом концах отрезка.

Итак,

$$y_{\text{наим}} = 3^{-2+1} + 2 = 2\frac{1}{3};$$

$$y_{\text{наиб}} = 3^{2+1} + 2 = 29.$$

Пример 4. Решить уравнение и неравенства:

а) $5^x = 6 - x$; б) $5^x \geqslant 6 - x$;
в) $5^x < 6 - x$.

Решение. а) Построим в одной системе координат графики функций $y = 5^x$ и $y = 6 - x$ (рис. 201). Они пересекаются в одной точке; судя по чертежу, это точка (1; 5). Проверка показывает, что на самом деле точка (1; 5) удовлетворяет и уравнению $y = 5^x$, и уравнению $y = 6 - x$. Абсцисса этой точки служит единственным корнем уравнения $5^x = 6 - x$, поскольку функция $y = 5^x$ возрастает, а функция $y = 6 - x$ убывает.

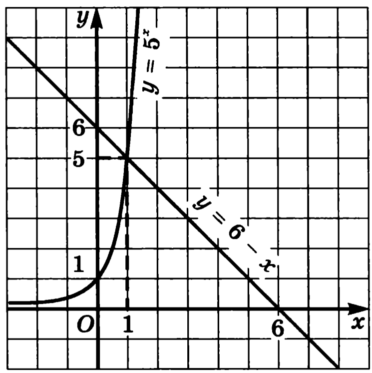


Рис. 201

Итак, уравнение $5^x = 6 - x$ имеет единственный корень $x = 1$.

б), в) Экспонента $y = 5^x$ лежит выше прямой $y = 6 - x$, если $x > 1$, — это хорошо видно на рисунке 201. Значит, решение неравенства $5^x \geqslant 6 - x$ можно записать так: $x \geqslant 1$. А решение неравенства $5^x < 6 - x$ можно записать так: $x < 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $x \geqslant 1$; в) $x < 1$.

§ 40. Показательные уравнения и неравенства

Показательными уравнениями называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на приведенные в предыдущем параграфе теоремы 1 и 3, согласно которым равенство $a^t = a^s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

***Теорема 1.* Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

Пример 1. Решить уравнения:

а) $2^{2x-4} = 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$.

Решение. а) Представив 64 как 2^6, перепишем заданное уравнение в виде $2^{2x-4} = 2^6$. Это уравнение равносильно уравнению $2x - 4 = 6$, откуда находим: $x = 5$.

б) Представив $\frac{1}{\sqrt{3}}$ как $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное уравнение в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Это уравнение равносильно уравнению $2x - 3,5 = 0,5$, откуда находим: $x = 2$.

в) Заданное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 3x = 3x - 8.$$

Далее имеем:

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 4.$$

Пример 2. Решить уравнение $\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-2}$.

Решение. Здесь есть возможность и левую и правую части уравнения представить в виде степени с основанием 5. В самом деле:

1) $(0,2)^{x-0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5} = (5^{-1})^{x-0,5} = 5^{0,5-x}$;

2) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{0,5}$;

3) $5^{0,5-x} : 5^{0,5} = 5^{0,5-x-0,5} = 5^{-x}$;

4) $5 \cdot 0,04^{x-2} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2} = 5 \cdot 5^{-2x+4} = 5^{1-2x+4} = 5^{5-2x}$.

Таким образом, заданное уравнение мы преобразовали к виду

$$5^{-x} = 5^{5-2x}.$$

Далее получаем: $-x = 5 - 2x$; $x = 5$.

Пример 3. Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение. Заметив, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, а $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, перепишем заданное уравнение в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Есть смысл ввести новую переменную: $y = 2^x$; тогда уравнение примет вид $y^2 + 2y - 24 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно y, находим: $y_1 = 4$, $y_2 = -6$. Но $y = 2^x$, значит, нам остается решить два уравнения:

$$2^x = 4; \quad 2^x = -6.$$

Из первого уравнения находим: $x = 2$; второе уравнение не имеет корней, поскольку при любых значениях x выполняется неравенство $2^x > 0$.

Ответ: 2.

Подведем некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения показательных уравнений*.

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 39.

2) Метод уравнивания показателей. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, где a — положительное число, отличное от 1. Мы применили этот метод в примерах 1 и 2.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 3.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{x+y} = 16^{3x-y}; \\ 9^{x+y} - 3^{x+y} = 72. \end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{x+y} = 16^{3x-y};$$

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(x+y)} = 2^{4(3x-y)};$$

$$2^{1+\frac{x+y}{2}} = 2^{12x-4y};$$

$$1 + \frac{x+y}{2} = 12x - 4y;$$

$$2 + x + y = 24x - 8y;$$

$$23x - 9y = 2.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду. Введем новую переменную: $z = 3^{x+y}$. Тогда второе уравнение системы примет вид $z^2 - z = 72$, откуда находим: $z_1 = 9$, $z_2 = -8$.

Из уравнения $3^{x+y} = 9$ находим: $x + y = 2$; уравнение $3^{x+y} = -8$ не имеет решений.

Итак, второе уравнение системы нам удалось преобразовать к виду

$$x + y = 2.$$

3) Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 23x - 9y = 2; \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 9 и сложим полученное уравнение с первым уравнением системы:

$$(23x - 9y) + (9x + 9y) = 2 + 18;$$
$$32x = 20;$$
$$x = \frac{5}{8}.$$

Из уравнения $x + y = 2$ находим: $\frac{5}{8} + y = 2$; $y = \frac{11}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$.

Показательными неравенствами называют неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1) проведем следующие рассуждения. Разделив обе части неравенства (1) на выражение $a^{g(x)}$, получим неравенство $\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} > 1$, равносильное неравенству (1) (поскольку обе части неравенства (1) мы разделили на выражение, положительное при любых значениях x). Далее имеем:

$$a^{f(x)-g(x)} > 1, \text{ т. е. } a^t > 1, \text{ где } t = f(x) - g(x).$$

Теперь следует рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t > 0$ (см. теорему 2 из § 39). Значит, $f(x) - g(x) > 0$, т. е. $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t < 0$ (см. теорему 4 из § 39). Значит, $f(x) - g(x) < 0$, т. е. $f(x) < g(x)$.

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 2. **Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$.**

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример 5. Решить неравенства:

а) $2^{2x-4} > 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $0,5^{x^2-3x} \leqslant 0,5^{3x-8}$.

Решение. а) Имеем: $2^{2x-4} > 2^6$. Это неравенство равносильно неравенству того же смысла $2x - 4 > 6$, откуда находим: $x > 5$.

б) Воспользовавшись тем, что $\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное неравенство в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Здесь основанием служит число $\frac{1}{3} < 1$. Значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $2x - 3,5 > 0,5$, откуда находим: $x > 2$.

в) Заданное неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $x^2 - 3x \geqslant 3x - 8$, т. е. $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$. Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 8$:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 4.$$

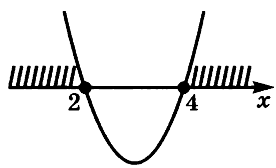


Рис. 202

Значит, неравенство $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$ выполняется при

$$x \leqslant 2 \text{ или } x \geqslant 4 \text{ (см. рис. 202).}$$

Пример 6. Решить неравенство $\frac{4 \cdot 3^x - 10}{3^{x+1} - 1} < 1$.

Решение. Заметим, что $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$, и введем новую переменную $y = 3^x$. Получим: $\frac{4y - 10}{3y - 1} < 1$.

Далее последовательно получаем:

$$\frac{4y - 10}{3y - 1} - 1 < 0;\quad \frac{y - 9}{3y - 1} < 0;\quad \frac{y - 9}{3\left(y - \frac{1}{3}\right)} < 0.$$

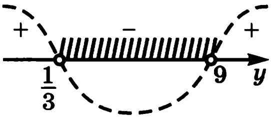


Рис. 203

Применив для решения последнего неравенства метод интервалов (рис. 203), находим: $\frac{1}{3} < y < 9$.

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\frac{1}{3} < 3^x < 9;\ \ 3^{-1} < 3^x < 3^2;\ -1 < x < 2.$$

§ 41. Понятие логарифма

Рассмотрим уравнение $2^x = 4$ и решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = 2^x$ и прямую $y = 4$ (рис. 204). Они пересекаются в точке $A(2;\ 4)$, значит, $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Рассуждая точно так же, находим корень уравнения $2^x = 8$ (см. рис. 204): $x = 3$.

А теперь попробуем решить уравнение $2^x = 6$ (геометрическая иллюстрация представлена на рис. 204). Ясно, что уравнение имеет один корень, но, в отличие от предыдущих случаев, где корни уравнений были найдены без труда (причем понятно, что их можно найти и не пользуясь графиками), с уравнением $2^x = 6$ у нас возникают трудности: по чертежу мы не можем определить значение корня, можем только установить, что оно заключено в промежутке от 2 до 3.

С подобной ситуацией мы уже встречались в § 33, когда, решая уравнение $x^4 = 5$, поняли, что надо вводить новый символ математического языка (корень этого уравнения обозначили $\sqrt[4]{5}$). Обдумывая ситуацию с показательным уравнением $2^x = 6$, математики ввели в рассмотрение новый символ $\log_2$, который назвали *логарифмом по основанию* 2, и с помощью этого символа корень уравнения $2^x = 6$ записали так: $x = \log_2 6$ (читают: *логарифм числа* 6 *по основанию* 2). Теперь для любого уравнения вида $2^x = b$, где $b > 0$, можно найти корень — им будет число $\log_2 b$ (рис. 205).

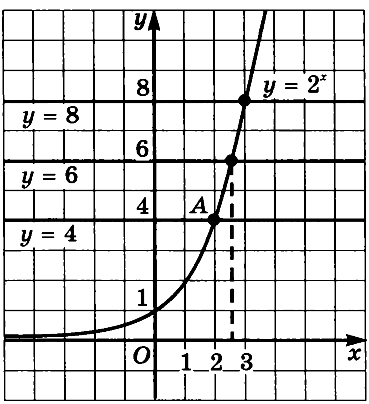


Рис. 204

Мы говорили об уравнении $2^x = 6$. С равным успехом мы можем говорить и об уравнении $3^x = 5$, и об уравнении $10^x = 0{,}3$, и об уравнении $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$, и вообще о любом уравнении вида $a^x = b$, где a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$. Единственный корень уравнения $a^x = b$ записывают так:

$$x = \log_a b$$

(читают: *логарифм числа b по основанию a*).

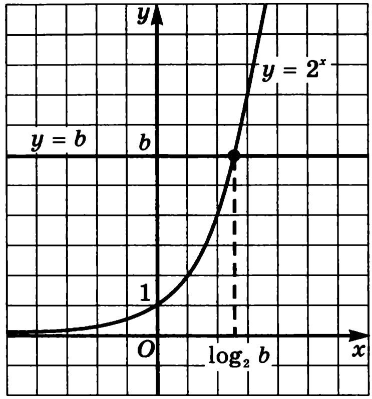


Рис. 205

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Например,

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$

$$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3, \text{ так как } 3^{-3} = \frac{1}{27};$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2, \text{ так как } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25;$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}, \text{ так как } 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Особо выделим три формулы (попробуйте их обосновать, это очень просто):

$$\boxed{\log_a a = 1,} \qquad \boxed{\log_a 1 = 0,} \qquad \boxed{\log_a a^c = c.}$$

Например,

$$\log_2 2 = 1, \ \log_3 3^4 = 4, \ \log_5 5^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}, \ \log_8 1 = 0.$$

Для числа $\log_2 6$, которое встретилось нам в начале параграфа, точного рационального значения мы указать не можем, поскольку $\log_2 6$ — *иррациональное число*. Доказывается это довольно красиво.

Предположим, что $\log_2 6$ — рациональное число, т. е. что $\log_2 6 = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда $2^{\frac{m}{n}} = 6$; $\left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n = 6^n$; $2^m = 6^n$. Последнее равенство невозможно, поскольку его правая часть есть натуральное число, которое делится без остатка на 3, а левая часть делиться без остатка на 3 никак не может.

Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, и, следовательно, $\log_2 6$ — иррациональное число.

Определение логарифма можно переписать так:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.}$$

В самом деле, что надо подставить вместо * в равенство $a^* = b$? Какое число должно находиться в показателе степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b? Ответ следует из данного выше определения: этим показателем является $\log_a b$. Значит, вместо * надо подставить число $\log_a b$, что мы и сделали.

Например, $2^{\log_2 3} = 3$, $5^{\log_5 10} = 10$, $10^{\log_{10} 0,4} = 0,4$.

Подчеркнем, что $\log_a b = c$ и $a^c = b$ — одна и та же зависимость между числами a, b и c, но только вторая описана на более простом языке (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения логарифма числа обычно называют *логарифмированием*. Эта операция является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием. Сравните:

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$0,3^4 = 0,0081$	$\log_{0,3} 0,0081 = 4$

Вычисление значения логарифма можно свести к решению некоторого показательного уравнения.

Пример. Вычислить:

а) $\log_4 128$; б) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}$.

Решение. а) Пусть $\log_4 128 = x$. Тогда, по определению логарифма, $4^x = 128$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{2x} = 2^7;\ 2x = 7;\ x = 3,5.$$

б) Пусть $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = x$. Тогда, по определению логарифма, $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{9}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}};\ \frac{x}{2} = \frac{2}{3};\ x = \frac{4}{3}.$$

в) Пусть $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2} = x$. Тогда, по определению логарифма, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{-x} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}};\ -x = 2 + \frac{1}{2};\ x = -2{,}5.$$

Логарифм по основанию 10 обычно называют *десятичным логарифмом*. Например, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 3{,}4$ — десятичные логарифмы. Вместо символа $\log_{10}$ принято использовать символ lg; так, вместо $\log_{10} 5$ пишут $\lg 5$, а вместо $\log_{10} 3{,}4$ пишут $\lg 3{,}4$. В недалеком прошлом десятичным логарифмам отдавали предпочтение; опираясь на особенности принятой десятичной системы счисления, составляли весьма подробные таблицы десятичных логарифмов, наносили значения логарифмов на шкалы специальных логарифмических линеек. В эпоху всеобщей компьютеризации десятичные логарифмы утратили свою ведущую роль, более важными стали логарифмы по основанию 2, но особенно широко используются в математике и технике логарифмы, основанием которых служит число e (такое же знаменитое, как число π), которое мы уже упоминали выше (см. с. 238).

§ 42. Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график

В § 41 мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию a. Для любого положительного числа можно найти логарифм по заданному основанию. Но тогда следует подумать и о функции вида $y = \log_a x$, $x \in (0; +\infty)$, о ее графике и свойствах. Этим и займемся в настоящем параграфе.

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, монотонна, значит, обратима (см. § 3).

Выразив x через y из уравнения $y = a^x$, получим: $x = \log_a y$; поменяв x и y местами, получим: $y = \log_a x$. Таким образом, функция $y = \log_a x$ является обратной для функции $y = a^x$ (см. § 3), а потому справедливо следующее утверждение.

График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.

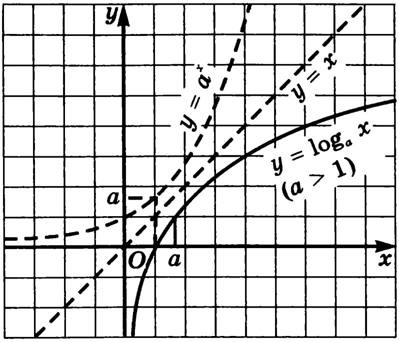


Рис. 206

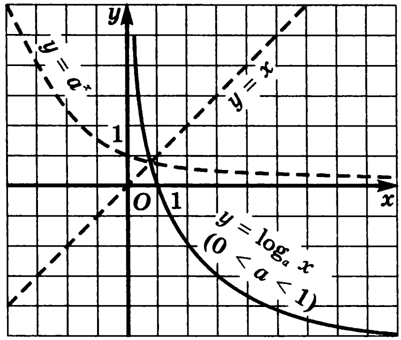


Рис. 207

На рисунке 206 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $a > 1$; на рисунке 207 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $0 < a < 1$.

График функции $y = \log_a x$ называют *логарифмической кривой*, хотя на самом деле нового названия можно было и не придумывать. Ведь это та же экспонента, что служит графиком показательной функции, только по-другому расположенная на координатной плоскости.

Если значение основания a указано, то график логарифмической функции можно построить по точкам. Пусть, например, нужно построить график функции $y = \log_2 x$. Составляя таблицу контрольных точек, будем руководствоваться соотношением $\log_2 2^r = r$ (см. § 41). Поэтому в таблицу в качестве значений аргумента x мы включим числа, являющиеся степенями числа 2.

Имеем:

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2;$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1;$$

$$\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0;$$
$$\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1;$$
$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2;$$
$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

Сведем полученные результаты в таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−2	−1	0	1	2	3

Отметив на координатной плоскости точки $\left(\frac{1}{4}; -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, (1; 0), (2; 1), (4; 2), (8; 3), проводим через них логарифмическую кривую (рис. 208).

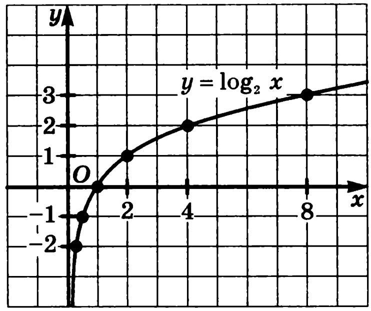


Рис. 208

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рисунке 206:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Свойства функции $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рисунке 207:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) убывает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Отметим, что ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции и в случае, когда $a > 1$, и в случае, когда $0 < a < 1$.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке:

а) $y = \lg x$, $x \in [1; 1000]$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $x \in \left[\frac{1}{9}; 27\right]$.

Решение. а) Функция $y = \lg x$ — непрерывная и возрастающая, поскольку основание этой логарифмической функции больше 1 (напомним, что $\lg x = \log_{10} x$). Следовательно, своих наименьшего и наибольшего значений функция достигает на концах заданного отрезка [1; 1000]:

$$y_{\text{наим}} = \lg 1 = 0;$$

$$y_{\text{наиб}} = \lg 1000 = \log_{10} 10^3 = 3.$$

б) Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ непрерывная и убывающая, поскольку основание этой логарифмической функции, т. е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Следовательно, своих наибольшего и наименьшего значений функция достигает на концах заданного отрезка $\left[\frac{1}{9};\ 27\right]$:

$$y_{\text{наиб}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2;$$

$$y_{\text{наим}} = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3.$$

Пример 2. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_2 x = 0$; б) $\log_2 x > 0$; в) $\log_2 x < 0$.

Решение. а) Уравнение $\log_2 x = 0$ имеет один корень $x = 1$, поскольку график функции $y = \log_2 x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0) (рис. 208).

б) График функции $y = \log_2 x$ расположен выше оси x при $x > 1$ (рис. 208). Значит, решение неравенства $\log_2 x > 0$ имеет вид $x > 1$.

в) График функции $y = \log_2 x$ расположен ниже оси x при $0 < x < 1$ (рис. 208). Значит, решение неравенства $\log_2 x < 0$ имеет вид $0 < x < 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $x > 1$; в) $0 < x < 1$.

Пример 3. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$; б) $\log_{\frac{2}{5}} x > 0$; в) $\log_{\frac{2}{5}} x < 0$.

Решение. График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ схематически изображен на рисунке 207. Заданные уравнение и неравенства нетрудно решить, используя эту геометрическую модель.

а) Уравнение $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$ имеет один корень $x = 1$, поскольку график функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0) (рис. 207).

б) График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ расположен выше оси x при $0 < x < 1$ (рис. 207). Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x > 0$ имеет вид $0 < x < 1$.

в) График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ расположен ниже оси x при $x > 1$ (рис. 207). Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x < 0$ имеет вид $x > 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $0 < x < 1$; в) $x > 1$.

Пример 4. Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Построим график функции $y = 2^x$ и выделим его часть на луче $(-\infty; 1]$ (выделенная часть пунктирной линии на рис. 209). Построим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и выделим его часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (выделенная часть тонкой линии на рис. 209). Объединение двух выделенных линий и представляет собой график заданной функции.

Прочитаем график, т. е. укажем иллюстрируемые графиком свойства заданной функции:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на луче $(-\infty; 1]$, убывает на открытом луче $(1; +\infty)$;

4) не ограничена снизу, ограничена сверху;

5) $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается в точке $x = 1$), наименьшего значения у функции нет;

6) функция претерпевает разрыв в точке $x = 1$; на луче $(-\infty; 1]$ и открытом луче $(1; +\infty)$ она непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2]$.

Заметим, что прямая $y = 0$ (ось x) является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to -\infty$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. ◀

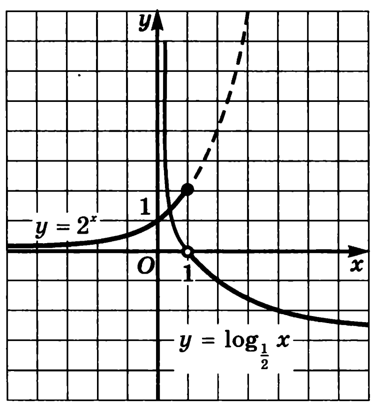


Рис. 209

Пример 5. Решить уравнение $\lg x = 11 - x$.

Решение. Достаточно очевидно, что $x = 10$ — корень уравнения. В самом деле, $\lg 10 = 1$ и $11 - 10 = 1$, т. е. при $x = 10$ заданное уравнение обращается в верное числовое равенство $1 = 1$.

Так как функция $y = \lg x$ возрастает, а функция $y = 11 - x$ убывает, то заданное уравнение имеет только один корень, который уже найден путем подбора: $x = 10$. ◁■

§ 43. Свойства логарифмов

В предыдущих параграфах мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию, изучили свойства функции $y = \log_a x$, построили ее график. Но чтобы успешно использовать на практике операцию логарифмирования, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе. *Все свойства формулируются и доказываются только для положительных значений переменных, содержащихся под знаками логарифмов.* Впрочем, два свойства доказательства не требуют, они представляют собой запись определения логарифма как показателя степени, мы ими уже пользовались:

$$\boxed{\log_a a^r = r;} \qquad \boxed{a^{\log_a b} = b.}$$

Теорема 1. **Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел**

$$\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c.}$$

Например,

$$\log_2 15 = \log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5;$$

$$\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2;$$

$$\lg 5 + \lg 2 = \lg (5 \cdot 2) = \lg 10 = 1.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\log_a bc = x$, $\log_a b = y$, $\log_a c = z$. Нам надо доказать, что выполняется равенство $x = y + z$.

Так как $\log_a bc = x$, то $a^x = bc$.

Так как $\log_a b = y$, то $a^y = b$.

Так как $\log_a c = z$, то $a^z = c$.

Итак, $a^x = bc$, $a^y = b$, $a^z = c$.

Значит, $a^y \cdot a^z = a^x$, т. е. $a^{y+z} = a^x$.

Но если степени двух положительных чисел равны и основания степеней равны и отличны от 1, то равны и показатели степеней. Значит, $y + z = x$, что и требовалось доказать. ●

Приведем краткую запись доказательства теоремы.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a bc = x$ $\log_a b = y$ $\log_a c = z$	$a^x = bc$ $a^y = b$ $a^z = c$	$a^x = a^y a^z$ $a^x = a^{y+z}$ $x = y + z$
Доказать: $x = y + z$		

Теорема остается справедливой и для случая, когда логарифмируемое выражение представляет собой произведение более двух положительных чисел.

Например,

$$\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7 = \log_5 (2 \cdot 3 \cdot 7) = \log_5 42.$$

З а м е ч а н и е. Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если... то» (как принято для теорем в математике). Приведем соответствующую формулировку: *если a, b и c — положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливо равенство* $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

***Теорема 2*. Если a, b, c — положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливо равенство**

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя* или *логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя*.

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 2{,}5 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2} = \log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 5 + 1;$$

$$\lg 15 - \lg 3 = \lg \frac{15}{3} = \lg 5.$$

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства, а вы попробуйте сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a \frac{b}{c} = x$ $\log_a b = y$ $\log_a c = z$	$a^x = \frac{b}{c}$ $a^y = b$ $a^z = c$	$a^x = a^y : a^z$ $a^x = a^{y-z}$ $x = y - z$
Доказать: $x = y - z$		

Теорема 3. **Если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство**

$$\boxed{\log_a b^r = r \log_a b.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.*

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 25 = \log_{\frac{1}{2}} 5^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} 5;$$

$$\lg \frac{1}{5} = \lg 5^{-1} = -\lg 5;$$

$$3 \log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125.$$

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства, а вы, как и при доказательстве теоремы 2, попробуйте сделать соответствующие комментарии по аналогии с теоремой 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a b^r = x$ $\log_a b = y$	$a^x = b^r$ $a^y = b$	$a^x = (a^y)^r$ $a^x = a^{ry}$ $x = ry$
Доказать: $x = ry$		

Пример 1. Известно, что положительные числа x, y, z, t связаны соотношением $x = \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}}$. Выразить $\log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) через логарифмы по основанию a чисел y, z, t.

Решение. 1) Логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя. Значит, $\log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a (yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t}$.

2) Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей. Значит, $\log_a (yz^3) = \log_a y + \log_a z^3$.

3) Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени. Значит,

$$\log_a z^3 = 3 \log_a z; \ \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a t^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_a t.$$

4) В итоге получаем:

$$\log_a x = \log_a (yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a y + \log_a z^3 - \frac{1}{3} \log_a t =$$

$$= \log_a y + 3 \log_a z - \frac{1}{3} \log_a t.$$

При наличии определенного опыта решение примера можно не разбивать на последовательные этапы, а оформить его так:

$$\log_a x = \log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a y + \log_a z^3 - \log_a t^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \log_a y + 3 \log_a z - \frac{1}{3} \log_a t.$$ ◀

Еще раз подчеркнем, что все свойства логарифмов мы получили при условии, что переменные принимают положительные значения. А как быть, если про знак переменной ничего не известно? Можно ли, например, написать $\lg x^2 = 2 \lg x$, если о знаке числа x ничего не известно? Отвечаем: нельзя, поскольку при $x < 0$ левая часть равенства определена, а правая не определена. Как же быть в таком случае? Нас выручит знак модуля. Поскольку $x^2 = |x|^2$ и $|x| > 0$ при $x \neq 0$, верное равенство выглядит так: $\lg x^2 = 2 \lg |x|$. Это частный случай общей формулы

$$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x| \quad (n \in Z).}$$

Помните и о том, что заменять выражение $\log_a bc$ выражением $\log_a b + \log_a c$ мы имеем право лишь в случае, когда $b > 0$ и $c > 0$. Если мы в этом не уверены, но знаем, что $bc > 0$, то, поскольку в этом случае выполняется равенство $bc = |bc| = |b| \cdot |c|$, следует использовать формулу

$$\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|.$$

Если числовое выражение A составлено из положительных чисел x, y, z с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы чисел x, y, z. Такое преобразование называют *логарифмированием* (см. пример 1). Ценность операции логарифмирования состоит в том, что она позволяет сводить вычисления к более простым операциям: произведение, частное, степень заменяются соответственно на сумму, разность, произведение.

Иногда приходится решать обратную задачу: находить выражение, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел. Такое действие называют *потенцированием*. При этом используется следующее утверждение.

Теорема 4. **Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.**

Это достаточно очевидное следствие монотонности логарифмической функции.

Пример 2. Известно, что $\lg x = 2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t$. Выразить x через y, z, t.

Решение. Имеем последовательно:

$$2\lg y = \lg y^2;$$

$$0{,}5\lg t = \lg t^{0{,}5} = \lg\sqrt{t};$$

$$2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t = \lg y^2 + \lg\sqrt{t} - \lg z = \lg\frac{y^2\sqrt{t}}{z}.$$

Итак, $\lg x = \lg\dfrac{y^2\sqrt{t}}{z}$ и, следовательно, $x = \dfrac{y^2\sqrt{t}}{z}$. ◁■

Пример 3. Известно, что $\log_3 2 = a$. Вычислить $\log_3 6{,}75$.

Решение. Выразим число 6,75 через числа 3 и 2 (3 — основание логарифма, 2 — заданное в условии логарифмируемое число) с помощью операций умножения, деления и возведения в степень:

$$6{,}75 = 6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} = \frac{3^3}{2^2}.$$

Далее находим:

$$\log_3 6{,}75 = \log_3\left(\frac{3^3}{2^2}\right) = \log_3 3^3 - \log_3 2^2 = 3 - 2\log_3 2 = 3 - 2a.$$ ◁■

Пример 4. Вычислить $49^{1-0{,}25\log_7 25}$.

Решение. Поработаем с показателем степени:

$$1 - 0{,}25\log_7 25 = \log_7 7 - \log_7 25^{\frac{1}{4}} = \log_7 7 - \log_7\sqrt[4]{5^2} =$$

$$= \log_7 7 - \log_7\sqrt{5} = \log_7\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Теперь заданное числовое выражение мы можем записать в виде $49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}}$.

Далее находим:

$$49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{2\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{\log_7 \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} = 7^{\log_7 \frac{49}{5}}.$$

Остается вспомнить, что $a^{\log_a b} = b$. Значит,

$$7^{\log_7 \frac{49}{5}} = \frac{49}{5} = 9{,}8.$$

Пример 5. Положительное число a записано в стандартном виде $a = a_0 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a_0 < 10$ и n — целое число (порядок числа a). Найти десятичный логарифм числа a.

Решение. $\lg a = \lg (a_0 \cdot 10^n) = \lg a_0 + \lg 10^n = \lg a_0 + n$.

Таким образом, $\lg a = n + \lg a_0$.

Проанализируем полученный результат. По условию $1 \leqslant a_0 < 10$, значит, в силу возрастания функции $y = \lg x$ имеем: $\lg 1 \leqslant \lg a_0 < \lg 10$, т. е. $0 \leqslant \lg a_0 < 1$.

Таким образом, нам удалось представить число $\lg a$ в виде суммы целого числа n и числа $\lg a_0$, заключенного в промежутке $[0; 1)$.

Число n — это наибольшее целое число, не превосходящее $\lg a$ (такое число, напомним, — это целая часть числа $\lg a$). Его называют *характеристикой десятичного логарифма числа* a. Число $\lg a_0$, т. е. дробную часть числа $\lg a$, называют *мантиссой десятичного логарифма числа* a.

Математики, как вы знаете, ничего просто так не делают; если уж они выделили десятичные логарифмы, ввели термины «характеристика» и «мантисса», значит, с определенной целью. С какой? Для ответа на этот вопрос рассмотрим пример: вычислить $\lg 70$, $\lg 700$, $\lg 700\,000$, $\lg 0{,}007$, если известно, что $\lg 7 \approx 0{,}8451$.

Имеем:

$$\lg 70 = \lg (7 \cdot 10) = \lg 7 + \lg 10 \approx 0{,}8451 + 1 = 1{,}8451;$$

$$\lg 700 = \lg (7 \cdot 10^2) = \lg 7 + \lg 10^2 \approx 0{,}8451 + 2 = 2{,}8451;$$

$$\lg 700\,000 = \lg (7 \cdot 10^5) = \lg 7 + \lg 10^5 \approx 0{,}8451 + 5 = 5{,}8451;$$

$$\lg 0{,}007 = \lg (7 \cdot 10^{-3}) = \lg 7 + \lg 10^{-3} \approx 0{,}8451 - 3 = -2{,}1549.$$

Таким образом, достаточно составить таблицу десятичных логарифмов чисел, заключенных в промежутке $[1; 10)$, чтобы с ее помощью и с помощью стандартного вида положительного числа вычислять десятичные логарифмы любых положительных чисел.

Завершая этот параграф, рассмотрим занимательный пример, где используются десятичные логарифмы.

Пример 6. Сколько цифр содержит число 7^{100}?

Решение. Часто начинают решать эту задачу «в лоб»: возводят число 7 постепенно в 1, 2, 3-ю и т. д. степени и пытаются увидеть закономерность. Имеем:

$7^1 = 7$ (одна цифра), $7^2 = 49$ (две цифры), $7^3 = 343$ (три цифры), $7^4 = 2401$ (четыре цифры), $7^5 = 16\,807$ (пять цифр), $7^6 = 117\,649$ (шесть цифр).

Возникает естественная гипотеза: каков показатель степени, столько цифр в результате. Но эта гипотеза рушится уже на следующем шаге: $7^7 = 823\,543$ — в этом числе не 7, а 6 цифр. Так что метод перебора и угадывания здесь не срабатывает.

Поступим по-другому: вычислим десятичный логарифм числа 7^{100}. Получаем: $\lg 7^{100} = 100 \cdot \lg 7 = 100 \cdot 0{,}8451 = 84{,}51$.

Видим, что характеристика логарифма равна 84. Значит, порядок числа 7^{100} равен 84, а потому в числе 7^{100} — 85 цифр.

§ 44. Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \tag{1}$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на теорему 4 из § 43, согласно которой равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

На практике эту теорему применяют так: переходят от уравнения (1) к уравнению $f(x) = g(x)$ (такой переход называют *потенцированием*), решают уравнение $f(x) = g(x)$, а затем проверяют его корни по условиям $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, определяющим область допустимых значений переменной (ОДЗ). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями уравнения (1). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение. 1) Потенцируя (т. е. освобождаясь от знаков логарифмов), получаем:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$
$$x^2 - x - 12 = 0;$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

2) Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x = 4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т. е. $x = 4$ — посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ — корень заданного уравнения.

Ответ: -3.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

Решение. 1) Сначала надо преобразовать уравнение к виду (1). Для этого воспользуемся правилом: сумма логарифмов равна логарифму произведения. Оно позволяет заменить выражение $\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3)$ выражением $\log_2 (x + 4)(2x + 3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать так:

$$\log_2 (x + 4)(2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

2) Потенцируя, получаем:

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 13x + 11 = 0;$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = -5{,}5.$$

3) Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

(обратите внимание: *условия для проверки всегда составляют по исходному уравнению*). Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет — это посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание. Иногда удобнее использовать другой порядок ходов: сначала решить систему неравенств — в примере 2 решением системы неравенств будет интервал $(-1{,}5;\ 0{,}5)$; это область допустимых значений переменной. Затем найти корни: $x_1 = -1$, $x_2 = -5{,}5$. И наконец, сделать проверку найденных значений x, но уже не с помощью системы неравенств, а по найденной заранее области допустимых значений. В примере 2 значение $x = -1$ принадлежит интервалу $(-1{,}5;\ 0{,}5)$, а значение $x = -5{,}5$ этому интервалу не принадлежит. Следовательно, $x = -5{,}5$ — посторонний корень, а $x = -1$ — единственный корень заданного логарифмического уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg \dfrac{x}{10}}$.

Решение. Так как $\lg \dfrac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1$, то заданное уравнение можно переписать так: $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg x - 1}$.

Есть смысл ввести новую переменную: $y = \lg x$; тогда уравнение примет следующий вид: $y^2 + y + 1 = \dfrac{7}{y-1}$.

Далее находим:

$$(y-1)(y^2+y+1) = 7;$$
$$y^3 - 1 = 7;$$
$$y^3 = 8;$$
$$y = 2.$$

Это значение удовлетворяет условию $y \neq 1$ (посмотрите: у записанного выше рационального относительно y уравнения переменная содержится в знаменателе, а потому следует проверить, не обращается ли знаменатель в нуль при найденном значении переменной y).

Итак, $y = 2$. Но $y = \lg x$, значит, нам осталось решить простейшее логарифмическое уравнение $\lg x = 2$, откуда находим: $x = 100$.

Ответ: 100.

Подведем некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения логарифмических уравнений.*

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 42.

2) Метод потенцирования. Он основан на теореме, полученной в начале параграфа. Мы применили этот метод в примерах 1 и 2.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 3.

Завершая параграф, рассмотрим пример, в котором для решения уравнения используется еще один метод — *метод логарифмирования*, и пример решения системы логарифмических уравнений.

Пример 4. Решить уравнение $x^{1-\log_5 x} = 0{,}04$.

Решение. Возьмем от обеих частей уравнения логарифмы по основанию 5; это равносильное преобразование уравнения, поскольку обе его части принимают только положительные значения. Получим: $\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04$.

Учтем, что $\log_5 x^r = r\log_5 x$ и что

$$\log_5 0{,}04 = \log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 5^{-2} = -2.$$

Это позволит переписать заданное уравнение так:

$$(1 - \log_5 x) \cdot \log_5 x = -2.$$

Замечаем, что «проявилась» новая переменная $y = \log_5 x$, относительно которой уравнение принимает весьма простой вид: $(1 - y)y = -2$. Далее получаем:

$$y^2 - y - 2 = 0;$$
$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1.$$

Но $y = \log_5 x$, значит, нам осталось решить два уравнения:

$$\log_5 x = 2; \quad \log_5 x = -1.$$

Из первого уравнения находим: $x = 5^2$, т. е. $x = 25$; из второго уравнения находим: $x = 5^{-1}$, т. е. $x = \frac{1}{5}$.

Ответ: 25; $\frac{1}{5}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ 2\log_3(x - y) = \log_3(y + 2). \end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$\lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6;$$
$$\lg 10(2x - y) = \lg 6(y + 2x);$$
$$10(2x - y) = 6(y + 2x);$$
$$x = 2y.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду:

$$\log_3 (x - y)^2 = \log_3 (y + 2);$$
$$(x - y)^2 = y + 2.$$

3) Решим полученную систему уравнений

$$\begin{cases} x = 2y, \\ (x - y)^2 = y + 2. \end{cases}$$

Подставив $2y$ вместо x во второе уравнение системы, получим:

$$(2y - y)^2 = y + 2;$$
$$y^2 = y + 2;$$
$$y^2 - y - 2 = 0;$$
$$y_1 = 2,\ y_2 = -1.$$

Из соотношения $x = 2y$ находим соответственно: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

4) Осталось сделать проверку найденных пар (4; 2) и (−2; −1) с помощью условий, которые задают область допустимых значений переменных x, y; эти условия мы находим, анализируя исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y > 0, \\ y + 2x > 0, \\ x - y > 0, \\ y + 2 > 0. \end{cases}$$

Пара (4; 2) удовлетворяет этим условиям, а пара (−2; −1) не удовлетворяет (например, она «не проходит» уже через первое условие $2x - y > 0$).

Ответ: (4; 2).

§ 45. Логарифмические неравенства

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \tag{1}$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1), где, разумеется, следует считать, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, преобразуем его к виду

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$$

и далее: $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, т. е. $\log_a t > 0$, где $t = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Теперь следует рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a t > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $t > 1$ (см. § 42, рис. 206). Значит, $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$, т. е. $f(x) > g(x)$, — мы учли, что $g(x) > 0$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a t > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $0 < t < 1$ (см. § 42, рис. 207). Значит, $0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$, т. е. $f(x) < g(x)$, — мы учли, что $g(x) > 0$ и $f(x) > 0$.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:**

при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$;

при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

На практике эту теорему применяют так: при $a > 1$ переходят от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ к равносильной ему системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — к равносильной неравенству $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют область допустимых значений переменной для неравенства (1), а знак последнего неравенства каждой из систем (обратите внимание!) либо совпадает со знаком неравенства (1) — в случае, когда $a > 1$, — либо противоположен знаку неравенства (1) — в случае, когда $0 < a < 1$.

Пример 1. Решить неравенства:
а) $\log_3 (2x - 4) > \log_3 (14 - x)$;
б) $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 4) > \log_{\frac{1}{3}} (14 - x)$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной для заданного неравенства определяется условиями $2x - 4 > 0$

и $14 - x > 0$. Поскольку основанием логарифмов служит число 3, а оно больше 1, то, «освобождаясь» от знаков логарифмов, мы получим неравенство того же смысла: $2x - 4 > 14 - x$.

В итоге получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 > 14 - x. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим, что $x > 2$, из второго — $x < 14$, из третьего — $x > 6$. Геометрическая иллюстрация (рис. 210) помогает найти решение системы неравенств: $6 < x < 14$.

б) Здесь основание логарифма, т. е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Значит, соответствующая система неравенств имеет вид

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 < 14 - x \end{cases}$$

(обратите внимание: знак последнего неравенства системы противоположен знаку исходного логарифмического неравенства).

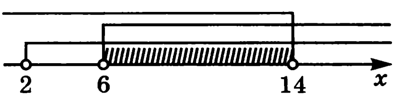


Рис. 210

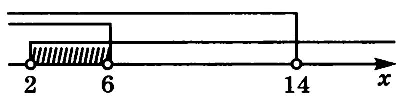


Рис. 211

Из первого неравенства системы находим, что $x > 2$, из второго — $x < 14$, из третьего — $x < 6$. Геометрическая иллюстрация (рис. 211) помогает найти решение системы неравенств: $2 < x < 6$.

Ответ: а) $6 < x < 14$; б) $2 < x < 6$.

Замечание. Еще раз рассмотрим систему неравенств, которая получилась в примере 1, а). Третье неравенство системы имеет вид $2x - 4 > 14 - x$, а второе: $14 - x > 0$. Но если $2x - 4 > 14 - x$, а $14 - x > 0$, то, по свойству транзитивности неравенств, получаем: $2x - 4 > 0$. Что это значит? Это значит, что первое неравенство системы с самого начала можно было отбросить без всякого ущерба для решения системы.

Рассуждая аналогично, в системе неравенств, которую мы получили в примере 1, б), можно было с самого начала отбросить второе неравенство.

Решая систему неравенств, полезно посмотреть, нет ли в ней неравенства, которое логически следует из других. Если такое неравенство есть, его можно отбросить. Советуем и вам так поступать, но, разумеется, только в том случае, если вы уверены в правильности своих выводов.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant -4$.

Решение. Представим -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$:

$-4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Это позволит переписать заданное неравенство так: $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16$.

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число, меньшее 1, составляем равносильную заданному неравенству систему неравенств:

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 \geqslant 16. \end{cases}$$

Обратите внимание: если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое (если $A \geqslant 16$, то тем более $A > 0$). Значит, первое неравенство системы можно отбросить. Решая второе неравенство, находим:

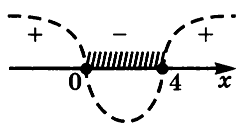


Рис. 212

$$x^2 - 4x \leqslant 0;\ \ x(x - 4) \leqslant 0;\ \ 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ (рис. 212).}$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2.$$

Решение. Имеем последовательно:

$$\lg x + \lg(45 - x) = \lg x(45 - x) = \lg(45x - x^2);$$
$$2 + \lg 2 = \lg 100 + \lg 2 = \lg 100 \cdot 2 = \lg 200.$$

Значит, заданное неравенство можно переписать так:

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200.$$

Освобождаясь от знаков десятичных логарифмов, получим неравенство того же смысла: $45x - x^2 < 200$. А условия, задающие область допустимых значений переменной, всегда определяют по исходному неравенству; в данном примере они таковы: $x > 0$ и $45 - x > 0$. В итоге получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ 45 - x > 0, \\ 45x - x^2 < 200. \end{cases}$$

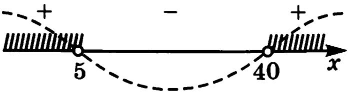


Рис. 213

Рис. 214

Первые два неравенства можно записать в виде двойного неравенства $0 < x < 45$. Решая третье неравенство системы, находим:

$$x^2 - 45x + 200 > 0;$$
$$(x - 40)(x - 5) > 0;$$
$$x < 5,\ x > 40 \text{ (рис. 213)}.$$

Отметив на числовой прямой это решение совместно с полученным ранее интервалом $0 < x < 45$, находим их пересечение (рис. 214), т. е. решение составленной выше системы неравенств:

$$0 < x < 5; \quad 40 < x < 45.$$

Пример 4. Решить неравенство $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \leqslant 0$.

Решение. Здесь «напрашивается» введение новой переменной $y = \log_2 x$, но сначала надо разобраться с выражением $\log_2^2 x^2$.

Имеем: $\log_2^2 x^2 = (\log_2 x^2)^2 = (2\log_2 x)^2 = 4\log_2^2 x$. Итак, если $y = \log_2 x$, то $\log_2^2 x^2 = 4y^2$. Поняв это, перепишем заданное неравенство в виде

$$4y^2 - 5y + 1 \leqslant 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $4y^2 - 5y + 1$: $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{4}$.

Значит, $4y^2 - 5y + 1 = 4(y - 1)\left(y - \frac{1}{4}\right)$, а потому последнее неравенство можно переписать в виде $4(y - 1)\left(y - \frac{1}{4}\right) \leqslant 0$.

Находим решение неравенства: $\frac{1}{4} \leqslant y \leqslant 1$.

Подставив вместо y выражение $\log_2 x$, получим: $\frac{1}{4} \leqslant \log_2 x \leqslant 1$, или, что то же самое, $\log_2 2^{\frac{1}{4}} \leqslant \log_2 x \leqslant \log_2 2$. Остается «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив имеющиеся знаки неравенств: $2^{\frac{1}{4}} \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $\sqrt[4]{2} \leqslant x \leqslant 2$.

§ 46. Переход к новому основанию логарифма

Логарифмических функций бесконечно много: $y = \log_2 x$; $y = \log_3 x$; $y = \log_{0,3} x$; $y = \lg x$; $y = \log_{\frac{8}{7}} x$ и т. д. Возникает вопрос, как они связаны между собой. Есть ли, например, какая-то связь между функциями $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$? На рисунке 215 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$. Не кажется ли вам, что график первой функции получается из графика второй функции растяжением от оси x с некоторым коэффициентом $k > 1$? Если это на самом деле верно, то должно выполняться равенство

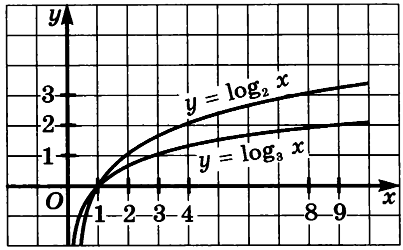


Рис. 215

$$\log_2 x = k \cdot \log_3 x.$$

Так ли это? На поставленные вопросы мы ответим в этом параграфе. Теоретической основой для ответа является следующая теорема.

Теорема. **Если a, b, c — положительные числа, причем a и c отличны от 1, то имеет место равенство**

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \qquad (1)$$

(формула перехода к новому основанию логарифма).

Например, $\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\log_7 4 = \frac{\lg 4}{\lg 7}$ и т. д.

Доказательство. Введем обозначения:

$$x = \log_a b,\ y = \log_c b,\ z = \log_c a.$$

Тогда $a^x = b$, $c^y = b$, $c^z = a$. Значит, $a^x = c^y$. Поскольку $a = c^z$, получаем: $(c^z)^x = c^y$, т. е. $c^{zx} = c^y$. Отсюда следует, что $zx = y$, т. е. $x = \frac{y}{z}$ или $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. ●

Теперь нетрудно ответить на поставленный выше вопрос: как связаны между собой различные логарифмические функции?

Рассмотрим логарифмические функции $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$, графики которых изображены на рисунке 215. По формуле (1) получаем:

$\log_3 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}$, откуда находим, что $\log_2 x = \log_2 3 \cdot \log_3 x$.

Таким образом, наша догадка подтвердилась: действительно, справедливо соотношение $\log_2 x = k \log_3 x$, где $k = \log_2 3$; верна и наша догадка о том, что в данном случае $k > 1$, поскольку $\log_2 3 > 1$.

Аналогичные формулы связывают и другие логарифмические функции. Например, справедливы соотношения:

$$\log_5 x = k \log_7 x, \text{ где } k = \log_5 7;$$
$$\lg x = k \log_{0,5} x, \text{ где } k = \lg 0{,}5 \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим два важных частных случая формулы перехода к новому основанию логарифма, два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Если a и b положительные и отличные от 1 числа, то справедливо равенство*

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.}$$

Например, $\log_2 3 = \dfrac{1}{\log_3 2}$; $\lg 5 = \dfrac{1}{\log_5 10}$.

Доказательство. Положив в формуле (1) $c = b$, получим:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}. \qquad \bullet$$

Следствие 2. *Если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равенство*

$$\boxed{\log_a b = \log_{a^r} b^r.}$$

Например, $\log_2 3 = \log_{2^2} 3^2 = \log_{2^{-1}} 3^{-1} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ и т. д.

Доказательство. Перейдем в выражении $\log_{a^r} b^r$ к логарифмам по основанию a: $\log_{a^r} b^r = \dfrac{\log_a b^r}{\log_a a^r} = \dfrac{r \log_a b}{r} = \log_a b.$ $\bullet$

Пример 1. Дано: $\lg 3 = a$, $\lg 5 = b$. Вычислить $\log_2 15$.

Решение.

$$\log_2 15 = \frac{\lg 15}{\lg 2} = \frac{\lg(3\cdot 5)}{\lg(10:5)} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 10 - \lg 5} = \frac{a+b}{1-b}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\sqrt[3]{4}} 3$.

Решение. Перейдем во всех логарифмах к одному основанию 4. Для этого дважды воспользуемся формулой, доказанной в следствии 2:

$$\log_2 x = \log_{2^2} x^2 = \log_4 x^2;$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} 3 = \log_{(\sqrt[3]{4})^3} 3^3 = \log_4 27.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в более простом виде:

$$\log_4 x^2 + \log_4 x = \log_4 27.$$

Далее получаем:

$$\log_4 (x^2 \cdot x) = \log_4 27;$$
$$\log_4 x^3 = \log_4 27;$$
$$x^3 = 27;$$
$$x = 3.$$

§ 47. Дифференцирование показательной и логарифмической функций

1. Число e. Функция $y = e^x$, ее свойства, график, дифференцирование

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$, где $a > 1$. Для различных оснований a получаем различные графики (рис. 216—218), но можно заметить, что все они проходят через точку (0; 1), все они имеют горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$, все они обращены выпуклостью вниз и, наконец, все они имеют касательные во всех своих точках.

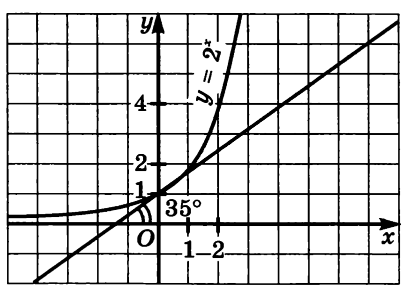


Рис. 216

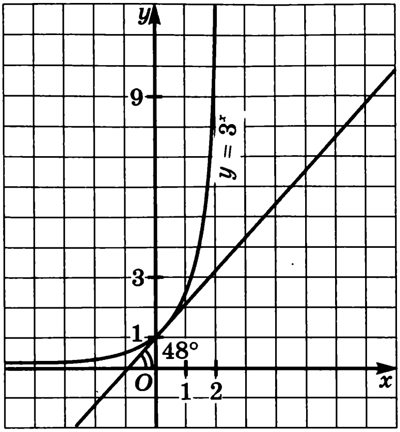


Рис. 217

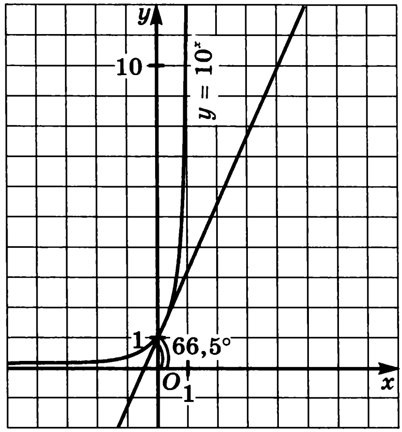


Рис. 218

Проведем для примера касательную к графику функции $y = 2^x$ в точке $x = 0$ (рис. 216). Если сделать аккуратные построения и измерения, то можно убедиться в том, что эта касательная образует с осью x угол 35° (примерно). Теперь проведем касательную к графику функции $y = 3^x$ тоже в точке $x = 0$ (рис. 217). Здесь угол между касательной и осью x будет больше — примерно 48°. А для показательной функции $y = 10^x$ в аналогичной ситуации получаем угол примерно 66,5° (рис. 218).

Итак, если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно увеличивается от 35° до 66,5°. Логично предположить, что существует основание a, для которого соответствующий угол равен 45°. Это основание должно быть заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше, чем 45°, а для функции $y = 3^x$ он равен 48°, что уже немного больше, чем 45°. Доказано, что интересующее нас основание действительно существует, его принято обозначать буквой e. Установлено, что число e — иррациональное, т. е. представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь:

$$e = 2{,}7182818284590\ldots;$$

на практике обычно полагают, что $e \approx 2{,}7$.

Замечание 1 (не очень серьезное). Ясно, что Л. Н. Толстой никакого отношения к числу e не имеет, тем не менее в записи числа e, обратите внимание, два раза подряд повторяется число 1828 — год рождения Л. Н. Толстого.

График функции $y = e^x$ изображен на рисунке 219. Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков показательных функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x = 0$ и осью абсцисс равен 45°.

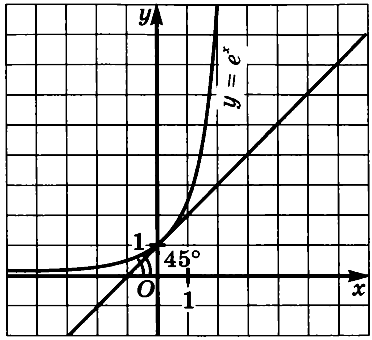


Рис. 219

Свойства функции $y = e^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз.

В курсе математического анализа доказано, что функция $y = e^x$ имеет производную в любой точке x, причем

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y = e^x$ в точке $x = 1$.

Решение. Напомним, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \qquad (1)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции, учитывая, что в данном примере $f(x) = e^x$.

1) $a = 1$.

2) $f(a) = f(1) = e$.

3) $f'(x) = e^x$; $f'(a) = f'(1) = e$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = e$, $f'(a) = e$ в формулу (1). Получим:

$$y = e + e \cdot (x - 1);$$
$$y = ex.$$

Пример 2. Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке $x = 3$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования функции $y = f(kx + m)$, согласно которому $y' = k \cdot f'(kx + m)$, и тем, что $(e^x)' = e^x$; здесь $f(kx + m) = e^{4x-12}$. Получим:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4 \cdot e^{4x-12}.$$

Далее имеем

$$f'(3) = 4 \cdot e^{12-12} = 4 \cdot e^0 = 4.$$

Ответ: 4.

Замечание 2. Вообще имеет место формула $(e^{kx})' = ke^{kx}$, т. е. функция $y = e^{kx}$ удовлетворяет уравнению $y' = ky$. Этим уравнением описываются многие процессы реальной действительности (радиоактивный распад, рост вклада в банке и т. д.). Поэтому функция $y = e^{kx}$ весьма почитаема в высшей математике.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2e^x$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x + 2).$$

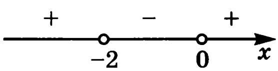


Рис. 220

Эта производная существует при всех значениях x, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = -2$ — это две стационарные точки. Отметим их на числовой прямой. Знаки производной на полученных промежутках меняются так, как показано на рисунке 220. Значит, $x = -2$ — точка максимума функции, $y_{\max} = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}5$; $x = 0$ — точка минимума, $y_{\min} = 0^2 \cdot e^0 = 0$.

2. Натуральные логарифмы. Функция $y = \ln x$, ее свойства, график, дифференцирование

Мы рассматривали логарифмы с различными основаниями: $\log_2 3$ — логарифм по основанию 2, $\log_5 7$ — логарифм по основанию 5, $\lg 2$ — логарифм по основанию 10 (десятичный логарифм) и т. д. Если основанием логарифма служит число e, то говорят, что задан *натуральный логарифм*.

Примеры натуральных логарифмов: $\log_e 2$, $\log_e 5$, $\log_e 0{,}2$ и т. д.

Подобно тому как для десятичных логарифмов введено специальное обозначение lg, введено специальное обозначение и для натуральных логарифмов: ln (l — *логарифм*, n — *натуральный*). Вместо $\log_e 2$ пишут ln 2, вместо $\log_e 5$ пишут ln 5 и т. д.

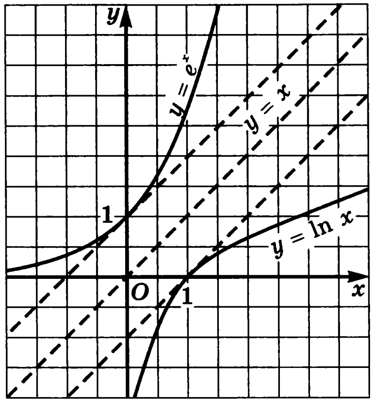


Рис. 221

Мы знаем, что график логарифмической функции $y = \log_a x$ симметричен графику показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$. Значит, и график функции $y = \ln x$ симметричен графику функции $y = e^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 221). Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков логарифмических функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x = 1$ и осью абсцисс равен 45°.

Свойства функции $y = \ln x$:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на $(0; +\infty)$;

4) не ограничена ни сверху, ни снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

8) выпукла вверх;

9) дифференцируема.

В курсе математического анализа доказано, что для любого значения $x > 0$ справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Приведем обоснование указанной формулы исходя из геометрических соображений.

На рисунке 222 изображены графики двух взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Эти графики симметричны относительно прямой $y = x$. Предположим, что в точке $M(x_0; y_0)$, взятой на графике функции $y = f(x)$,

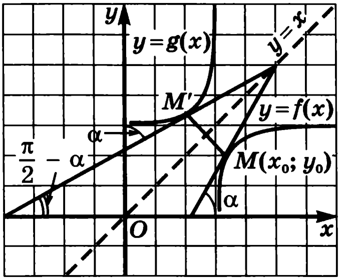


Рис. 222

существует невертикальная касательная к графику; эта касательная составляет с положительным лучом оси абсцисс угол α. Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Возьмем на графике обратной функции $y = g(x)$ точку M', симметричную точке M относительно прямой $y = x$. Точка M' имеет координаты $(y_0; x_0)$, в этой точке к графику функции $y = g(x)$ можно провести касательную, причем она симметрична проведенной выше касательной к графику $y = f(x)$ в точке M (ось симметрии — прямая $y = x$). Новая касательная составляет с положительным лучом оси y угол α, с положительным лучом оси x — угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Поэтому

$$g'(y_0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, мы получили следующее правило вычисления производной обратной фукнции: *производная обратной функции есть величина, обратная производной данной функции* (строгого доказательства этого утверждения мы здесь не приводим, ограничимся геометрическим истолкованием).

Кратко это правило можно записать так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ если } x'_y \neq 0.$$

Если $y = \ln x$, то

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y}.$$

Так как $y = \ln x$, то $e^y = x$. Следовательно,

$$(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Пример 5. Вычислить значение производной функции $y = \ln(3x + 5)$ в точке $x = -1$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования функции $y = f(kx + m)$, согласно которому $y' = k \cdot f'(kx + m)$, и тем, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; в данном примере $f(kx + m) = \ln(3x + 5)$. Получим:

$$y' = (\ln(3x + 5))' = 3 \cdot \frac{1}{3x + 5} = \frac{3}{3x + 5};$$

$$f'(-1) = \frac{3}{3 \cdot (-1) + 5} = 1{,}5.$$

Пример 6. Провести касательную к графику функции $y = \ln x$ в точке $x = e$.

Решение. Напомним еще раз, как и в примере 1, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (1)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции, учитывая, что в данном примере $f(x) = \ln x$.

1) $a = e$.

2) $f(a) = f(e) = \ln e = 1$.

3) $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(a) = f'(e) = \frac{1}{e}$.

4) Подставим найденные числа $a = e$, $f(a) = 1$, $f'(a) = \frac{1}{e}$ в формулу (1). Получим: $y = 1 + \frac{1}{e} \cdot (x - e)$, т. е. $y = \frac{x}{e}$.

На рисунке 223 изображен график функции $y = \ln x$, построена прямая $y = \frac{x}{e}$, проходящая через начало координат. Чертеж подтверждает полученный результат: построенная прямая касается графика функции $y = \ln x$ в точке $(e; 1)$.

Ответ: $y = \frac{x}{e}$.

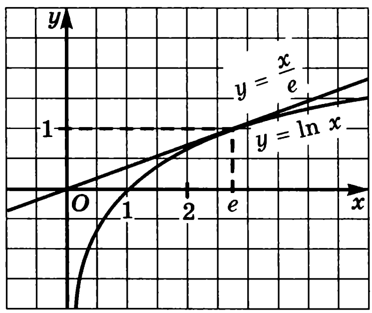


Рис. 223

Пример 7. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Эта производная существует при всех значениях $x > 0$, т. е. при всех значениях x из области определения функции. Значит, критических точек у функции нет. Приравняв производную нулю, получим:

$$1 - \ln x = 0; \ \ln x = 1; \ x = e.$$

Это единственная стационарная точка. Если $x < e$, то $y' > 0$; если $x > e$, то $y' < 0$. Значит, $x = e$ — точка максимума функции $y_{\max} = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$.

Ответ: $x = e$ — точка максимума; $y_{\max} = \dfrac{1}{e}$.

Завершая параграф, получим формулы дифференцирования любой показательной и любой логарифмической функции.

Пусть дана показательная функция $y = a^x$. Воспользуемся тем, что $a = e^{\ln a}$, и, следовательно, $a^x = e^{x \ln a}$. Тогда

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x.$$

Итак,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Например, $(2^x)' = 2^x \ln 2$; $(5^x)' = 5^x \ln 5$ и т. д.

Пусть дана логарифмическая функция $y = \log_a x$. Имеем

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.}$$

ГЛАВА 8 Первообразная и интеграл

§ 48. Первообразная

В главе 5 мы по заданной функции, руководствуясь различными формулами и правилами, находили ее производную. Мы убедились в том, что производная имеет многочисленные применения: это скорость движения (или, обобщая, скорость протекания любого процесса); угловой коэффициент касательной к графику функции; с помощью производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы; она помогает решать задачи на оптимизацию.

Но наряду с задачей о нахождении скорости по известному закону движения встречается и обратная задача — задача о восстановлении закона движения по известной скорости. Рассмотрим одну из таких задач.

Пример 1. По прямой движется материальная точка, скорость ее движения в момент времени t задается формулой $v = gt$. Найти закон движения.

Решение. Пусть $s = s(t)$ — искомый закон движения. Известно, что $s'(t) = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой равна gt. Нетрудно догадаться, что $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. В самом деле,

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Ответ: $s = \frac{gt^2}{2}$.

Сразу заметим, что пример решен верно, но неполно. Мы получили $s = \frac{gt^2}{2}$. На самом деле задача имеет бесконечно много решений: любая функция вида $s = \frac{gt^2}{2} + C$, где C — произвольная константа, может служить законом движения, поскольку

$$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt.$$

Чтобы задача стала более определенной, нам надо было зафиксировать исходную ситуацию: указать координату движущейся точки в какой-либо момент времени, например при $t = 0$. Если, скажем, $s(0) = s_0$, то из равенства $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ получаем: $s(0) = 0 + C$, т. е. $C = s_0$. Теперь закон движения определен однозначно: $s = \frac{gt^2}{2} + s_0$.

В математике взаимно обратным операциям присваивают разные названия, придумывают специальные обозначения, например: возведение в квадрат (x^2) и извлечение квадратного корня $\left(\sqrt{x}\right)$, синус ($\sin x$) и арксинус ($\arcsin x$) и т. д. Процесс нахождения производной по заданной функции называют *дифференцированием*, а обратную операцию, т. е. процесс нахождения функции по заданной производной, — *интегрированием*.

Сам термин «производная» можно обосновать «по-житейски»: функция $y = f(x)$ «производит на свет» новую функцию $y' = f'(x)$. Функция $y = f(x)$ выступает как бы в качестве «родителя», но математики, естественно, не называют ее «родителем» или «производителем», они говорят, что это, по отношению к функции $y' = f'(x)$, *первичный образ*, или *первообразная*.

Определение. Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для функции $y = f(x)$** на промежутке X, если для $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

На практике промежуток X обычно не указывают, но подразумевают (в качестве естественной области определения функции).

Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для любого x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для любого x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для любого x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.

4) Функция $y = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$, поскольку для любого $x > 0$ справедливо равенство $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ради краткости иногда вместо фразы: «Функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$», — говорят: «$F(x)$ — первообразная для $f(x)$».

Зная формулы для нахождения производных, нетрудно составить таблицу формул для нахождения первообразных.

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

Надеемся, вы поняли, как составлена эта таблица: производная функции, которая записана во втором столбце, равна той функции, которая записана в соответствующей строке первого столбца (проверьте, не поленитесь, это очень полезно).

Например, для функции $y = x^5$ первообразной, как вы установите, служит функция $y = \frac{x^6}{6}$ (см. пятую строку таблицы).

Некоторого комментария заслуживает, пожалуй, лишь шестая строка таблицы, из которой следует, что первообразной для $\frac{1}{x}$ служит $\ln|x|$. В самом деле, найдем производную функции $y = \ln|x|$. Если $x > 0$, то $|x| = x$, и мы получаем: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если

$x < 0$, то $|x| = -x$, и мы получаем: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Замечание 1. Ниже мы сформулируем теорему о том, что если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$. Поэтому правильнее было бы во втором столбце таблицы всюду добавить слагаемое C, где C — произвольное действительное число.

При нахождении первообразных, как и производных, используются не только формулы (указанные в таблице), но и некоторые правила. Они непосредственно связаны с соответствующими правилами вычисления производных.

Мы знаем, что производная суммы равна сумме производных. Это правило порождает соответствующее правило нахождения первообразных.

Правило 1. *Первообразная суммы равна сумме первообразных.*

Обращаем ваше внимание на некоторую «легковесность» этой формулировки. На самом деле следовало бы сформулировать теорему: *если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то и сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.* Но обычно, формулируя правила (а не теоремы), оставляют только ключевые слова — так удобнее для применения правила на практике.

Пример 2. Найти первообразную для функции $y = 2x + \cos x$.

Решение. Первообразной для $2x$ служит x^2; первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Значит, первообразной для функции $y = 2x + \cos x$ будет служить функция $y = x^2 + \sin x$ (и вообще любая функция вида $y = x^2 + \sin x + C$).

Мы знаем, что постоянный множитель можно вынести за знак производной. Это правило порождает соответствующее правило нахождения первообразных.

Правило 2. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$,* то *$kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.*

Пример 3. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = 5\sin x$; б) $y = -\frac{\cos x}{3}$; в) $y = 12x^3 + 8x - 1$.

Р е ш е н и е. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = 5 \sin x$ первообразной будет функция $y = -5 \cos x$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = -\frac{1}{3} \cos x$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{3} \sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$; первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$; первообразной для функции $y = 1$ служит функция $y = x$. Используя первое и второе правила нахождения первообразных, получим, что первообразной для функции $y = 12x^3 + 8x - 1$ служит функция $y = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x$, т. е. $y = 3x^4 + 4x^2 - x$.

З а м е ч а н и е 2. Как известно, производная произведения не равна произведению производных (правило дифференцирования произведения более сложное) и производная частного не равна частному производных. Поэтому нет и правил для нахождения первообразной произведения или первообразной частного двух функций. Будьте внимательны!

Получим еще одно правило нахождения первообразных. Мы знаем, что производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Это правило порождает соответствующее правило нахождения первообразных.

Теорема 1. **Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+m)\right)' = \frac{1}{k} \cdot kF'(kx + m) = f(kx + m).$$

Это и означает, что функция $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$. ●

Смысл теоремы 1 заключается в следующем. Если вы знаете, что первообразной для $f(x)$ является $F(x)$, а вам нужно найти первообразную для $f(kx + m)$, то действуйте так: берите ту же самую функцию F, но вместо аргумента x подставьте выражение $kx + m$; кроме того, не забудьте перед знаком функции записать «поправочный множитель» $\frac{1}{k}$.

Пример 4. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos \frac{x}{3}$; в) $y = (4 - 5x)^7$; в) $y = e^{\frac{2x-1}{3}}$.

Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = \sin 2x$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x)$, т. е. $y = -\frac{\cos 2x}{2}$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = \cos \frac{x}{3}$ первообразной будет функция $y = 3 \sin \frac{x}{3}$; здесь $k = \frac{1}{3}$, значит, $\frac{1}{k} = 3$.

в) Первообразной для x^7 служит $\frac{x^8}{8}$; значит, для функции $y = (4 - 5x)^7$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(4-5x)^8}{8}$, т. е. $y = -\frac{1}{40} \cdot (4 - 5x)^8$.

г) Выражение $\frac{2x-1}{3}$ можно представить в виде $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Первообразной для e^x служит e^x, значит, для функции $y = e^{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$, т. е. $y = \frac{3}{2} e^{\frac{2x-1}{3}}$. ◁■

Теорема 2. **Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$.**

Эту теорему доказывают в курсе высшей математики.

Если бы мы в примере 4 искали множество всех первообразных для каждой из заданных функций, то ответ был бы таким:

а) для функции $y = \sin 2x$ все первообразные имеют вид $y = -\frac{\cos 2x}{2} + C$;

б) для функции $y = \cos \frac{x}{3}$ все первообразные имеют вид $y = 3 \sin \frac{x}{3} + C$;

в) для функции $y = (4 - 5x)^7$ все первообразные имеют вид $y = -\frac{1}{40} \cdot (4 - 5x)^8 + C$;

г) для функции $y = e^{\frac{2x-1}{3}}$ все первообразные имеют вид $y = \frac{3}{2} e^{\frac{2x-1}{3}} + C$.

Пример 5. Задан закон изменения скорости от времени $v = -5 \sin 2t$. Найти закон движения $s = s(t)$, если известно, что в момент времени $t = 0$ координата точки была равна 1,5 (т. е. $s(0) = 1,5$).

Решение. Так как скорость — производная координаты как функции времени, то нам прежде всего нужно найти первообразную для скорости, т. е. первообразную для функции $v = -5 \sin 2t$. Одной из таких первообразных является функция $s = -5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2t)$, т. е. $s = 2,5 \cos 2t$, а все первообразные имеют вид

$$s = 2,5 \cos 2t + C. \qquad (1)$$

Чтобы найти значение постоянной C, воспользуемся начальными условиями: $s(0) = 1,5$. Подставив в формулу (1) значения $t = 0$, $s = 1,5$, получим:

$$1,5 = 2,5 \cdot \cos 0 + C;$$
$$1,5 = 2,5 + C;$$
$$C = -1.$$

Подставив найденное значение C в формулу (1), получим интересующий нас закон движения:

$$s = 2,5 \cos 2t - 1.$$

§ 49. Определенный интеграл

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача 1 *(о вычислении площади криволинейной трапеции).*

В декартовой прямоугольной системе координат xOy дана фигура (рис. 224), ограниченная осью x, прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$; назовем эту фигуру *криволинейной трапецией*. Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции.

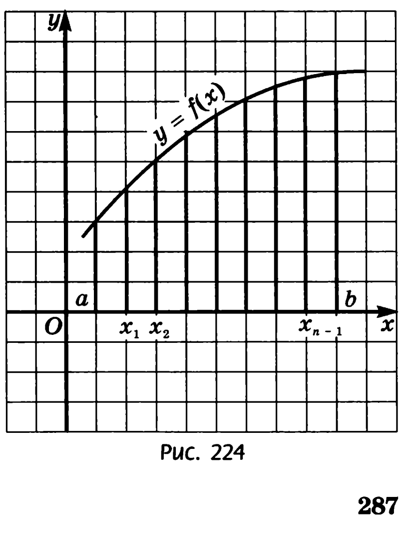


Рис. 224

Решение. Геометрия дает нам рецепты для вычисления площадей многоугольников и некоторых частей круга (сектора, сегмента). Используя геометрические соображения, мы сумеем найти лишь приближенное значение искомой площади, рассуждая следующим образом.

Разобьем отрезок $[a; b]$ (основание криволинейной трапеции) на n равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$. Проведем через эти точки прямые, параллельные оси y. Тогда заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей, на n узеньких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.

Рассмотрим отдельно k-ый столбик, т. е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[x_k; x_{k+1}]$. Заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k)$ (рис. 225). Площадь прямоугольника равна $f(x_k) \cdot \Delta x_k$, где Δx_k — длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$; естественно считать составленное произведение приближенным значением площади k-го столбика.

Если теперь сделать то же самое со всеми остальными столбиками, то придем к следующему результату: площадь S заданной криволинейной трапеции приближенно равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 226):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \\ + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем, что $a = x_0$, $b = x_n$; Δx_0 — длина отрезка $[x_0; x_1]$, Δx_1 — длина отрезка $[x_1; x_2]$ и т. д; при этом, как мы условились выше, $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1}$.

Итак, $S \approx S_n$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

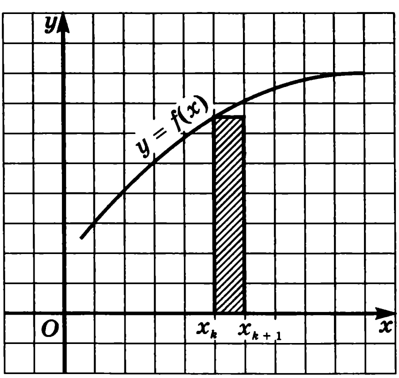


Рис. 225

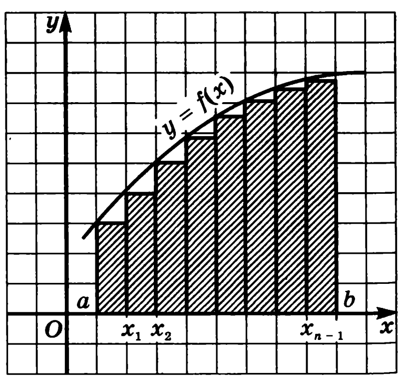


Рис. 226

По определению полагают, что искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности (S_n):

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 2 *(о вычислении массы стержня).*

Дан прямолинейный неоднородный стержень $[a;\ b]$ (рис. 227), плотность в точке x вычисляется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найти массу стержня.

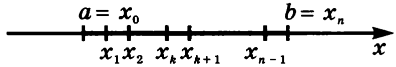


Рис. 227

Решение. Масса m тела, как известно из курса физики, равна произведению плотности ρ на объем V (вместо объема берут площадь, если речь идет о плоской пластине; вместо объема берут длину, если речь идет о прямолинейном стержне без учета его толщины). Но этот закон действует только для однородных тел, т. е. в тех случаях, когда плотность постоянна. Для неоднородного стержня используется тот же метод, что был применен при решении задачи 1.

1) Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим k-й участок $[x_k;\ x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого участка постоянна, а именно такая, как, например, в точке x_k. Итак, мы считаем, что $\rho = \rho(x_k)$.

3) Найдем приближенное значение массы k-го участка, это приближенное значение обозначим m_k:

$$m_k = \rho(x_k)\Delta x_k,$$

где Δx_k, как и в предыдущей задаче, — длина отрезка $[x_k;\ x_{k+1}]$.

4) Найдем приближенное значение массы стержня

$$m \approx S_n,$$

$$\text{где } S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1} =$$
$$= \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \rho(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

5) Физическая масса равна пределу последовательности (S_n)

$$\boxed{m = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 3 *(о перемещении точки).*

По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a;\ b]$.

Р е ш е н и е. Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $s = vt$, т. е. $s = v(b - a)$. Для неравномерного движения приходится использовать те же идеи, на которых было основано решение двух предыдущих задач.

1) Разделим промежуток времени $[a; b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$ и будем считать, что в этот промежуток времени скорость была постоянной, такой, как в момент времени t_k. Итак, мы считаем, что $v = v(t_k)$.

3) Найдем приближенное значение перемещения точки за промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$, это приближенное значение обозначим s_k:

$$s_k = v(t_k)\Delta t_k.$$

4) Найдем приближенное значение перемещения s:

$$s \approx S_n,$$

$$\text{где } S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_{n-1} =$$
$$= v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}.$$

5) Искомое перемещение равно пределу последовательности (S_n):

$$\boxed{s = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Подведем итоги. Решения трех различных задач к одной и той же математической модели. Многие задачи из различных областей науки и техники приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, данную математическую модель надо специально изучить, т. е.:

а) присвоить ей новый термин;

б) ввести для нее обозначение;

в) научиться с ней работать.

Этим и займемся.

2. Понятие определенного интеграла

Дадим математическое описание той модели, которая была построена в трех рассмотренных задачах для функции $y = f(x)$, непрерывной (но необязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке $[a; b]$:

1) разбиваем отрезок $[a; b]$ на n равных частей;

2) составляем сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 +$$
$$+ \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

3) вычисляем $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

В курсе математического анализа доказано, что этот предел в случае непрерывной (или кусочно-непрерывной) функции существует. Его называют **определенным интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$** и обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(читают: *интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс*). Числа a и b называют *пределами интегрирования* (соответственно *нижним* и *верхним*).

Замечание. Приведем правдоподобную версию происхождения указанных обозначения и термина: $\int$ — стилизованная буква S (*summa*); $f(x)dx$ — напоминание о слагаемых вида $f(x_k)\Delta x_k$, из которых состоит сумма S_n. Само слово *интеграл* происходит от латинского слова *integer* — «целый». Употребление этого термина вполне оправданно: вспомните, какой смысл вкладывается в русском языке в слово *интеграция* — восстановление, восполнение, воссоединение, т. е. это процесс, ведущий к состоянию связанности отдельных частей в целое. В построенной математической модели речь фактически идет о воссоединении целого по отдельным частям (например, о нахождении всей площади по площадям столбиков, как было в задаче 1).

Вернемся к трем рассмотренным выше задачам. Определение площади, данное в задаче 1, теперь можно переписать следующим образом:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx,} \tag{1}$$

здесь S — площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 224. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*.

Определение массы m прямолинейного неоднородного стержня с плотностью $\rho(x)$, данное в задаче 2, можно переписать так:

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

В этом состоит *физический смысл определенного интеграла*.

Наконец, определение перемещения s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, данное в задаче 3, можно переписать так:

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

Это еще одно физическое истолкование определенного интеграла.

3. Формула Ньютона — Лейбница

У вас, наверное, возник вопрос: какая связь между определенным интегралом, о котором идет речь в § 49, и первообразной, о которой шла речь в § 48?

Ключ к разгадке дает задача 3. С одной стороны, перемещение s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

С другой стороны, координата движущейся точки есть первообразная для скорости — обозначим ее $s(t)$; значит, перемещение s выражается формулой $s = s(b) - s(a)$. В итоге получаем:

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a),$$

где $s(t)$ — первообразная для $v(t)$.

В курсе математического анализа доказана следующая теорема.

Теорема. **Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Приведенную формулу обычно называют ***формулой Ньютона — Лейбница*** в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда *двойной подстановкой*) и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3 dx$.

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс.

Решение. Можно взять полуволну синусоиды от точки $x = 0$ до точки $x = \pi$ (рис. 228) и воспользоваться формулой (1) при следующих условиях: $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$. Получим:

$$S = \int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = .$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

(в процессе вычислений мы учли, что первообразной для $\sin x$ является $-\cos x$).

Ответ: $S = 2$.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 8$.

Решение. Фигура, площадь которой требуется вычислить, изображена на рисунке 229. Имеем

$$S = \int_{0}^{8} \sqrt[3]{x} dx = \int_{0}^{8} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Big|_{0}^{8} = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}\Big|_{0}^{8} = \frac{3}{4} \cdot \left(8^{\frac{4}{3}} - 0^{\frac{4}{3}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (16 - 0) = 12.$$

Ответ: $S = 12$.

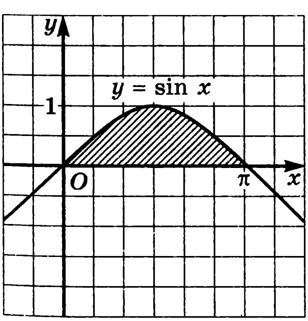


Рис. 228

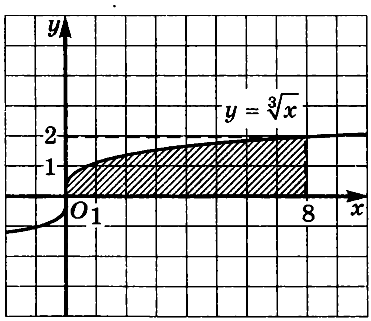


Рис. 229

Опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, можно получить два свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b =$$

$$= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

●

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

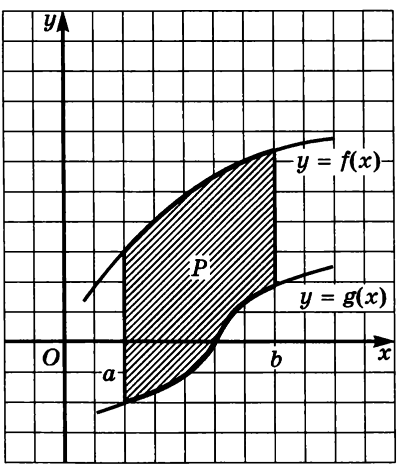


Рис. 230

С помощью интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций типа той, что представлена на рисунке 224, но и плоских фигур более сложного вида, например такого, который представлен на рисунке 230. Фигура P ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, причем на отрезке $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$. Чтобы вычислить площадь S такой фигуры, будем действовать следующим образом.

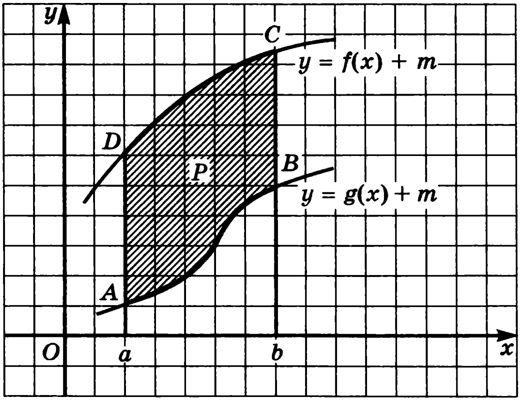


Рис. 231

Выполним параллельный перенос фигуры P на m единиц вверх ($m > 0$) так, чтобы фигура P оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс (рис. 231). Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = f(x) + m$, $y = g(x) + m$, причем обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a; b]$. Имеем:

$$S = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Итак, *площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$, вычисляется по формуле*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.} \qquad (2)$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ и гиперболой $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Речь идет о вычислении площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 232. Имеем:

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

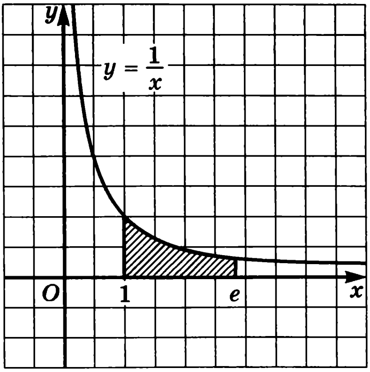


Рис. 232

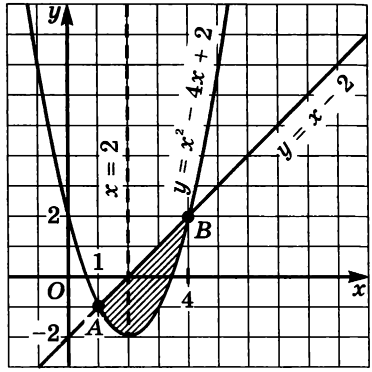


Рис. 233

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Прямую $y = x - 2$ можно построить по точкам (2; 0) и (0; −2) (рис. 233). Абсциссу вершины параболы найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4;$$
$$2x - 4 = 0;$$
$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2$.

Значит, вершиной параболы служит точка (2; −2), а осью параболы — прямая $x = 2$. Возьмем две пары точек, симметричных относительно оси параболы: (1; −1) и (3; −1), (0; 2) и (4; 2), и построим параболу по пяти точкам (рис. 233). Парабола и прямая пересекаются в точках A и B, для отыскания абсцисс этих точек надо решить уравнение $x^2 - 4x + 2 = x - 2$.

Находим последовательно:

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 4.$$

Фигура, площадь которой надо найти, ограничена линиями $y = x^2 - 4x + 2$ (снизу) и $y = x - 2$ (сверху). Можно считать, что с боков эта фигура ограничена прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Значит, для вычисления площади фигуры можно применить формулу (2):

$$S = \int_1^4((x - 2) - (x^2 - 4x + 2))dx = \int_1^4(5x - x^2 - 4)dx =$$

$$= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = \left(5 \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4\right) - \left(5 \cdot \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1\right) = 4{,}5.$$

Ответ: $S = 4{,}5$.

ГЛАВА 9 Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§ 50. Статистическая обработка данных

На праздничном вечере среди учеников 11 «А» и 11 «Б» классов провели лотерею. Каждый из 50 школьников произвольно задумал одну цифру от 0 до 9 и записал ее и на левой и на правой половинках своего лотерейного билета. Правые половинки билетов остались у их владельцев, а левые половинки положили на стол перед организатором лотереи. Итак, на столе 50 листочков, содержащих всю необходимую информацию. Как в ней разобраться?

Первое, что целесообразно сделать с такой разрозненной информацией, — это как-то упорядочить и сгруппировать ее. Так и поступили, разложив все 50 ответов по кучкам: в одну собрали все ответы «0», в другую собрали все ответы «1» и т. д. После этой перегруппировки результаты собрали в таблицу, и общая картина распределения полученных данных стала абсолютно ясна:

Ответ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество ответов	2	5	3	9	4	10	3	5	3	5	1

Потом, несколько пародируя телевизионные шоу, всем участникам раздавали небольшие призы по шуточным номинациям: «Самый популярный» (ответ 5), «Почти самый популярный» (ответ 3), «Оригинально, но неверно» (ответ 10), «Сладкая парочка» (ответ 0), «Три богатыря» (ответы 2, 6 и 8), «Отличники» (ответы 1, 7 и 9), «Хорошисты» (ответ 4). Пока проходило награждение, включили компьютер, и результаты из таблицы ввели в программу статистической обработки данных. Получили три картинки — три графических изображения распределения данных.

На первой из них по оси абсцисс отложены сами ответы (числа из первой строки таблицы), по оси ординат отложены количества ответов (числа из второй строки), а в координатной плоскости отмечены точки (0; 2), (1; 5), (2; 3), (3; 9), ..., (9; 5), (10; 1), соответствующие парам чисел из столбцов таблицы. Отмеченные

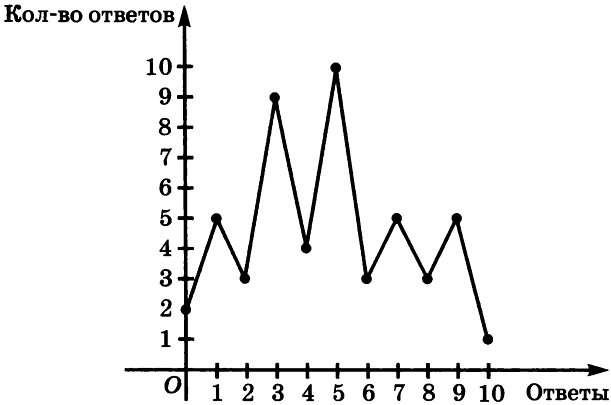


Рис. 234

11 точек для наглядности соединены ломаной. Получился *многоугольник распределения* (рис. 234).

Вторая картинка получается из первой таким образом. Вертикальный отрезок с концами в точках (0; 0) и (0; 2) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного вертикального столбика, ширина которого равна 1, а высота равна 2. Точно так же следующий вертикальный отрезок с концами в точках (1; 0) и (1; 5) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного вертикального столбика, ширина которого равна 1, а высота равна 5, и т. д. Получается столбчатая диаграмма — *гистограмма распределения* (рис. 235).

Третья картинка состоит из круга, разделенного на 11 секторов, внутри каждого сектора указан соответствующий ему ответ. Сектор «0» занимает $\frac{1}{25}$ часть круга, так как два полученных

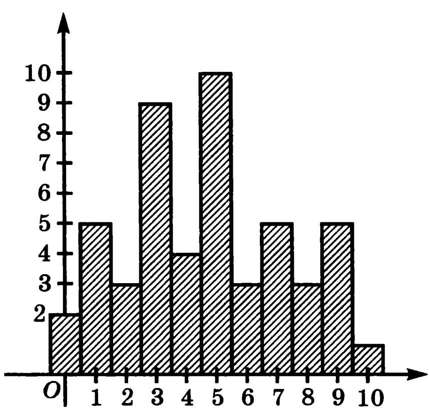


Рис. 235

ответа «0» составляют $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ часть от общего числа всех ответов. Значит, центральный угол сектора «0» равен $\frac{360°}{25} = 14{,}4°$. Самый большой из всех 11 секторов — это сектор «5», он занимает $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ часть всего круга, и его центральный угол равен $\frac{360°}{5} =$ $= 72°$. А сектор «10» — самый маленький, его центральный угол равен 7,2°. Так получается *круговая диаграмма* (рис. 236).

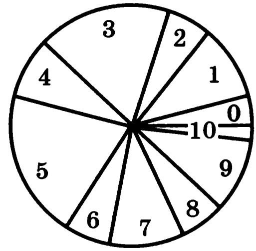


Рис. 236

Подведем предварительные итоги. Мы на конкретном примере разобрали основные этапы простейшей статистической обработки данных:

1) сначала данные измерений *упорядочивают* и *группируют*;
2) затем составляют *таблицы распределения данных*;
3) таблицы распределения позволяют построить *графики распределения данных* в виде многоугольника распределения, гистограммы распределения или круговой диаграммы.

К этим трем этапам позже, как правило, добавляют еще один:

4) получение *паспорта данных* измерения, который состоит из небольшого количества основных *числовых характеристик* полученной информации.

Перечислим некоторые числовые характеристики для разобранного выше измерения.

Объем измерения. В данном случае он равен 50, так как обрабатывались ответы 50 участников.

Размах измерения. В данном случае он равен 10, т. е. разности между наибольшим (10) и наименьшим (0) результатами измерения ($10 - 0 = 10$).

Мода измерения. В данном случае она равна 5, так как ответ «5» — самый «модный», самый популярный, он встретился чаще других — 10 раз из всех 50 результатов.

Среднее (или *среднее арифметическое*). Это частное от деления суммы всех результатов измерения на объем измерения. Среднее удобно вычислять после того, как составлена таблица распределения. В данном случае вычисления выглядят так:

$$\frac{0\cdot 2+1\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 9+4\cdot 4+5\cdot 10+6\cdot 3+7\cdot 5+8\cdot 3+9\cdot 5+10\cdot 1}{50} =$$

$$= \frac{0+5+6+27+16+50+18+35+24+45+10}{50} = \frac{236}{50} = 4{,}72.$$

Чаще всего результатами измерения являются числа. Каждое число, встретившееся в конкретном измерении, называют *вариантой измерения*[1]. В конкретном измерении его варианты могут быть никак не упорядочены, как, например, билетики на столе перед организатором лотереи. Если записать все варианты измерения по порядку (например, по времени) их получения, то получится *ряд данных* измерения. Если же начать с наименьшей из всех вариант измерения и затем записать все варианты в порядке возрастания (точнее неубывания) их числовых значений, то получится *сгруппированный ряд данных*. В разобранном выше примере сгруппированный ряд данных выглядит так:

$$\underbrace{0,\,0}_{2},\ \underbrace{1,\,\ldots,\,1}_{5},\ \underbrace{2,\,2,\,2}_{3},\ \underbrace{3,\,\ldots,\,3}_{9},\ \underbrace{4,\,4,\,4,\,4}_{4},\ \underbrace{5,\,\ldots,\,5}_{10},\ \underbrace{6,\,6,\,6}_{3},$$
$$\underbrace{7,\,\ldots,\,7}_{5},\ \underbrace{8,\,8,\,8}_{3},\ \underbrace{9,\,\ldots,\,9}_{5},\ \underbrace{10}_{1}.$$

Среднюю варианту в сгруппированном ряде данных называют *медианой измерения*. Если средних вариант две, то медиана равна их полусумме. Так, в рассмотренном примере 50 вариант, средних — две, это варианты № 25 и № 26. Обе они равны 5, значит, и медиана равна 5.

Ответ «0» встретился два раза. В статистике в этом случае говорят, что *абсолютная частота* варианты «0» равна двум. Ответ «7» встретился пять раз. Значит, *абсолютная частота* варианты «7» равна пяти. К сожалению, в статистике термин «частота» используется в различных сочетаниях: абсолютная частота, относительная частота, процентная частота, статистическая частота, эмпирическая частота, частота наступления случайного события и т. п. Мы заменим термин *абсолютная частота* более кратким.

Определение. Если среди всех данных конкретного измерения одна из вариант встретилась k раз, то число k называют **кратностью** этой варианты.

В разобранном примере кратность варианты «5» равна 10, кратность варианты «3» равна 9 и т. д. (см. таблицу).

	Варианта											Сумма
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Кратность	2	5	3	9	4	10	3	5	3	5	1	50

[1] Использование женского рода слегка непривычно, но именно такой термин принят в статистике. Кстати, это помогает избежать путаницы с привычным использованием слова «вариант» в мужском роде (например, вариант контрольной работы).

Так получается *таблица распределения* данных измерения. Клетку «Сумма» добавляют для контроля: число в графе «Сумма» всегда должно равняться объему измерения.

Посмотрим, как эти понятия используются в других примерах.

Пример 1. На уроке физкультуры 14 школьников прыгали в высоту, а учитель записывал их результаты. Получился такой ряд данных (в сантиметрах):

125, 110, 130, 125, 120, 130, 140, 125,
110, 130, 120, 125, 120, 125.

Требуется сгруппировать данные, составить таблицу их распределения, найти размах, моду и медиану измерения.

Решение. Выпишем все варианты измерения в порядке возрастания (точнее, неубывания), разделяя пробелами группы одинаковых результатов:

110,110, 120,120,120, 125,125,125,125,125,
130,130,130, 140.

Это сгруппированный ряд данных. Размах измерения равен 140 − 110 = 30. Варианта 140 встретилась однажды, кратность равна 1. Варианта 110 встретилась дважды, кратность равна 2. Варианта 125 встретилась наибольшее число раз, ее кратность равна 5; это мода измерения. Составляем таблицу распределения:

	Варианта					Сумма
	110	120	125	130	140	
Кратность	2	3	5	3	1	14

Если двигаясь по сгруппированному ряду слева направо отсчитать половину (7) результатов, то мы остановимся на результате 125 см. Следующая половина результатов начинается также со 125. Значит, 125 — медиана измерения. ◀

Подчеркнем, что в процессе упорядочивания, группировки данных и составления таблиц распределения с самими данными ничего не происходит: они остаются неизменными. Изменяется только способ их представления. По существу меняется только дизайн информации, способ ее оформления.

Пример 2. В таблице распределения данных часть информации была утеряна. Восстановить ее, если известно, что объем измерения равен 20, размах равен 6, а мода равна 2.

	Варианта					Сумма
		−1	0		3	
Кратность	5	1		7	3	

Р е ш е н и е. По определению, в графе «Сумма» должен стоять объем измерения, т. е. 20. Этот объем равен сумме всех кратностей. Значит, кратность варианты «0» равна $20 - (5 + 1 + 7 + 3) = 4$. Самая большая кратность равна 7. Значит, над ней и расположена мода измерения, равная 2. Так как размах равен 6, а наибольшая варианта равна 3, то наименьшая варианта равна $3 - 6 = -3$. Эту варианту помещаем в последнюю свободную графу над кратностью 5. Итак, все пустые места в таблице заполнены.

Ответ (в виде итоговой таблицы):

	Варианта					Сумма
	–3	–1	0	2	3	
Кратность	5	1	4	7	3	20

Пример 3. По приведенной гистограмме распределения данных (рис. 237) найти: количество вариант измерения, объем, размах, моду измерения, наиболее удаленную от моды варианту и ее кратность. Составить таблицу распределения данных.

Р е ш е н и е. Количество вариант — это количество столбиков в гистограмме, т. е. 7. Объем измерения равен сумме кратностей всех вариант, т. е. равен сумме высот всех семи столбиков: $3 + 2 + 7 + 3 + 5 + 4 + 1 = 25$. Таблица распределения выглядит так:

	Варианта							Сумма
	2	4	5	6	7	9	10	
Кратность	3	2	7	3	5	4	1	25

Наибольшая варианта равна 10, а наименьшая равна 2. Значит, размах равен 8. Чаще других — 7 раз — встретилась варианта 5. Значит, мода равна 5. На наибольшем расстоянии от моды находится варианта 10, ее кратность равна 1. ◁■

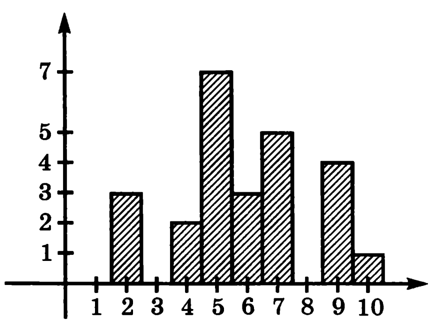


Рис. 237

Обратите внимание, что варианты измерения совсем не обязательно располагаются через равные промежутки. Вполне возможны и пропуски, и неравномерное расположение вариант на оси абсцисс. Подчеркнем также, что кратность варианты всегда больше нуля: ведь если число ни разу не встретилось среди результатов измерения, то оно не является вариантой измерения.

Если кратность данной варианты разделить на объем измерения, то получится *частота варианты.*

$$\textbf{Частота варианты} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объем измерения}}.$$

Это число показывает, какую часть (долю) среди всех данных составляют данные, равные выбранной варианте. Заметим, что для составления круговой диаграммы на рисунке 236 мы фактически пользовались понятием частоты варианты. В статистике, как правило, используют термин *относительная частота.* Мы будем пропускать прилагательное *относительная*: других частот у нас не будет.

Разумеется, частоту варианты можно измерять и в процентах.

$$\textbf{Частота варианты (в процентах)} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объем измерения}} \cdot 100\%.$$

Зная таблицу распределения данных, нетрудно составить таблицу распределения частот данных, скажем, для примера 2:

	Варианта					Сумма
	–3	–1	0	2	3	
Кратность	5	1	4	7	3	20
Частота	0,25	0,05	0,2	0,35	0,15	1
Частота, %	25	5	20	35	15	100

А теперь составим таблицу распределения частот по таблице распределения данных из примера 3:

	Варианта							Сумма
	2	4	5	6	7	9	10	
Кратность	3	2	7	3	5	4	1	25
Частота	0,12	0,08	0,28	0,12	0,2	0,16	0,04	1
Частота, %	12	8	28	12	20	16	4	100

Если нам целиком известна вторая строка таблицы, то по ней единственным образом можно заполнить третью и четвертую строки. Однако, скажем, по третьей строке нельзя точно узнать числа во второй строке: для такого восстановления нужно знать объем измерения. Иногда по частичной информации в разных строках можно восстановить всю информацию в таблице.

Пример 4. Восстановить сводную таблицу распределения данных измерения по следующей информации:

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность		$2k$		$4k$	200
Частота					
Частота, %	$3k$	$k^2 - 7k - 33$			

Решение. В последнем столбце сумма частот всегда равна 1, а сумма частот в процентах всегда равна 100. Правильнее всего начинать восстановление информации с того столбца, в котором уже заполнено больше всего клеток — в данном случае с варианты № 2. Всего было 200 результатов, среди них встретились $2k$ результатов, равных варианте № 2. Значит, частота этой варианты равна $\frac{2k}{200}$, а процентная частота в сто раз больше частоты, т. е. равна k. Поэтому $k^2 - 7k - 33 = k$. Решив это уравнение, получим: $k_1 = -3$, $k_2 = 11$. Но k — натуральное число, поэтому из двух найденных значений выбираем $k = 11$.

Итак, под вариантой № 2 в первой строке записываем число 22, во второй — 0,11, в третьей — 11.

Столбцы под вариантами № 1 и № 4 теперь заполняются сразу, так как по одной заполненной клетке легко восстанавливаются сведения в других клетках. Под вариантой № 1 в последней строке стоит число $3k$, т. е. 33, значит, во второй — число 0,33, а в первой — число 66. Под вариантой № 4 в первой строке стоит число $4k$, т. е. 44, значит, во второй — число 0,22, а в последней — число 22. Столбец под вариантой № 3 заполняется по дополнению: всего было 200 результатов, а во второй строке в трех других столбцах оказалось 132 результата. Значит, кратность варианты № 3 равна 68. Теперь все пустые места заполнены:

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность	66	22	68	44	200
Частота	0,33	0,11	0,34	0,22	1
Частота, %	33	11	34	22	100

Пример 5. В десятых классах трех школ микрорайона провели проверочный диктант по русскому языку. На рисунке 238 изображена гистограмма распределения полученных отметок.

а) Найти: общее количество работ, частоту пятерок, процентную частоту двоек.

б) Заполнить сводную таблицу распределения данных.

в) Построить гистограмму распределения частот (в процентах).

г) Построить круговую диаграмму распределения частот (в процентах).

Решение. а) На гистограмме указано, что двоек было 40, троек — 50, четверок — 75, пятерок — 35. Значит, всего было 200 работ. Это и есть объем измерения. Частота пятерок равна $\frac{35}{200} =$ $= 0{,}175$, а частота (в процентах) двоек равна $\frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%$.

б) Так как все кратности известны, то можно заполнить всю таблицу распределения:

	Варианта				Сумма
	2	3	4	5	
Кратность	40	50	75	35	200
Частота	0,2	0,25	0,375	0,175	1
Частота, %	20	25	37,5	17,5	100

в) Для построения гистограммы распределения частот (в процентах) используем первую и четвертую строки. Получим четыре вертикальных столбика (рис. 239), основания которых соответствуют полученным отметкам, а высоты равны найденным частотам (в процентах).

Подчеркнем, что гистограммы на рисунках 238 и 239 отличаются друг от друга только размерами по оси ординат, а общий характер распределения — один и тот же в обоих случаях.

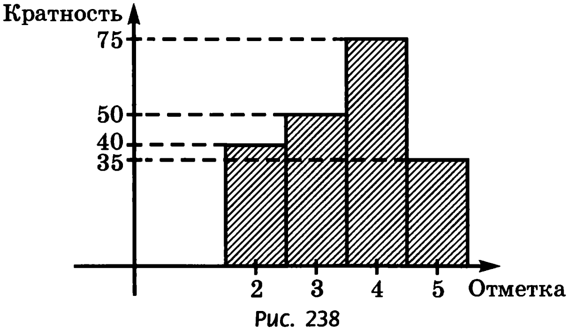


Рис. 238

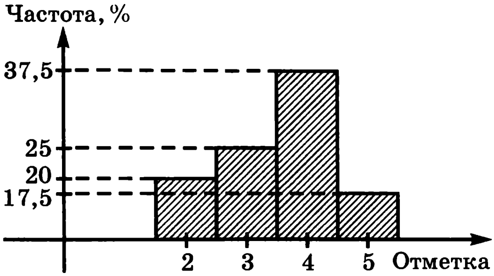


Рис. 239

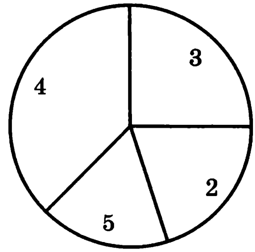


Рис. 240

г) Разделим круг на четыре сектора. Центральный угол сектора двойки составляет 20% от 360°, т. е. равен 72°. Центральный угол сектора тройки составляет 25% от 360°, это прямой угол. Центральные углы секторов четверки и пятерки равны соответственно 135° и 63° (рис. 240). ◁■

Пример 6. В большом книжном магазине провели оценку того, как распределены в нем книги, по пяти ценовым категориям:

Цена p	$p \leqslant 50$	$50 < p \leqslant 100$	$100 < p \leqslant 200$	$200 < p \leqslant 400$	$p > 400$
Категория	Дешевые	Умеренные	Средние	Дорогие	Очень дорогие

По первой тысяче проверенных наименований составили гистограмму распределения частот (в процентах) (рис. 241). Найти частоту дешевых книг, количество очень дорогих книг, моду распределения. Составить таблицу распределения количества книг по категориям.

Решение. Частота в 100 раз меньше частоты в процентах. Значит, частота дешевых книг равна 0,15. Очень дорогие книги составляют 9% от общего числа, т. е. от 1000 книг. Значит, очень дорогих книг было 90. Таблица распределения количества книг в ценовых категориях выглядит так:

Категория	Дешевые	Умеренные	Средние	Дорогие	Очень дорогие
Количество	150	250	330	180	90

Модой распределения являются средние по цене книги, их было 330. ◁■

Пример 6 показывает, что вариантой измерения совсем не обязательно является число. Вполне возможны случаи, когда варианты измерения отличаются друг от друга просто по названию.

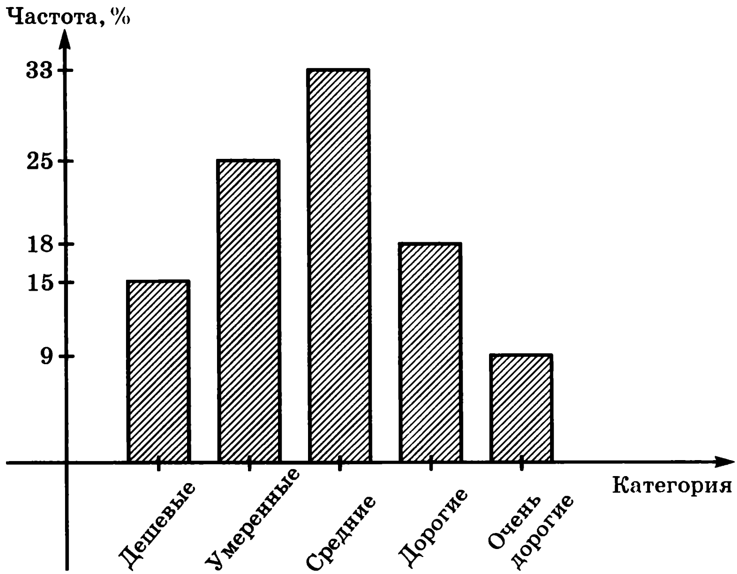


Рис. 241

В таких случаях говорят о *номинативной* шкале вариант измерения (*номинативная шкала* — шкала по номинациям, т. е. по названию, по имени). Заметим, что в таком случае теряет смысл понятие размаха измерения: неизвестно, какая из вариант наибольшая, а какая наименьшая. Но так как во всех реальных измерениях количество вариант конечно, то всегда можно их имена или названия заменить на номера № 1, № 2, № 3, ... и после этого перейти к обычному числовому способу перечисления вариант.

Пример 7. Вычислить среднее измерений в примерах 1—6.

Решение. 1) В примере 1 было 14 прыгунов. Общая сумма их прыжков в высоту составила

$$110 \cdot 2 + 120 \cdot 3 + 125 \cdot 5 + 130 \cdot 3 + 140 \cdot 1 = 220 + 360 + \\ + 625 + 390 + 140 = 1735 \text{ см}.$$

Значит, среднее измерения равно $\frac{1735}{14} \approx 123{,}93$ см.

2) В примере 2 было получено 20 результатов. Используя таблицу распределения из примера 2, вычисляем среднее:

$$\frac{(-3) \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3}{20} = \frac{-15 - 1 + 14 + 9}{20} = 0{,}35.$$

3) В примере 3 было 25 результатов. Получаем:

$$\frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 1}{25} =$$

$$= \frac{6 + 8 + 35 + 18 + 35 + 36 + 10}{25} = \frac{148}{25} = 5{,}92.$$

4) В примере 4 среднее вычислить нельзя, так как мы знаем только номера вариант, но не знаем их реальных числовых значений. Аналогично обстоит дело и в примере 6: бессмысленно умножать имя «дешевые» на 150 и складывать его, например, с именем «умеренные», умноженным на 250. Правда, здесь возможен следующий, весьма условный и приблизительный, подход. Предположим, что в среднем дешевые книги стоят 30 р., умеренные стоят 80 р., средние — 150 р., дорогие — 300 р., очень дорогие — 600 р. Тогда общая стоимость всей тысячи книг (примерно) такова:

$$30 \cdot 150 + 80 \cdot 250 + 150 \cdot 330 + 300 \cdot 180 + 600 \cdot 90 =$$
$$= 100(45 + 200 + 495 + 540 + 540) = 182\,000,$$

а средняя цена (приблизительно) равна 182 р. Произвол при таком подсчете весьма высок: вполне может быть, что дешевые книги в среднем стоят 40 р., а дорогие — 350 р.

5) В примере 5 было 200 результатов. У вариант этого измерения практически совпали их наименования и их численные значения: двойки — 2, тройки — 3... Поэтому подсчет среднего возможен:

$$\frac{2 \cdot 40 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 75 + 5 \cdot 35}{200} = \frac{80 + 150 + 300 + 175}{200} = \frac{705}{200} = 3{,}525.$$

Отметим, что подсчет можно было вести сразу по таблице частот. Это даже удобнее. Смотрите:

$$\frac{2 \cdot 40 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 75 + 5 \cdot 35}{200} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}375 + 5 \cdot 0{,}175 = 3{,}525.$$ ◁■

Подсчет среднего значения — вещь важная, но далеко не всегда полезная. Например, если вам известно расписание движения электричек от станции А до города Б на целый день, то совершенно бессмысленно вычислять среднее времени отправления электрички. Скорее всего получится ответ — где-то около 13-00 или 14-00, но он не даст никакой содержательной информации. А вот среднее время нахождения электрички в пути — весьма полезная информация: заранее зная его, вы хотя бы приблизительно можете планировать свое время. Другой классический пример — средняя температура людей, лежащих в одной больнице. Никакого здравого вывода из того, что среди 200 пациентов она сегодня равна, скажем 36,9°, а вчера равнялась 36,7°, сделать невозможно. А вот средняя дневная, среднемесячная или среднегодовая температура в определенной точке земного шара — очень важный метеорологический показатель.

Среднее, мода и медиана относятся к одному и тому же типу числовых характеристик данных измерения. Иногда их называют *мерами центральной тенденции*: каждое из этих чисел по-своему описывает некоторое центральное значение ряда данных. Например, при поиске нового места работы довольно естественно спросить о средней зарплате на интересующем вас предприятии. Однако может так случиться, что ответ о большой величине средней зарплаты введет вас в заблуждение. Например, пусть медиана или мода зарплаты много меньше, чем средняя зарплата. Это просто означает, что на данном предприятии сравнительно небольшое число работников получает очень большую зарплату, а большинство работников получает маленькую зарплату. В таком случае, видимо, стоит интересоваться средней зарплатой не на всем предприятии, а в более узком секторе должностей, на которых вы предполагаете работать.

Для статистического анализа результатов измерения важными являются не только его центральные значения, но и то, насколько тесно, «кучно», расположены эти результаты вокруг, например, среднего значения всех результатов.

Пример 8. На испытательном стенде оружейного завода пристреливают готовые ружья, т. е. уточняют и корректируют их прицел. В таблице приведены измерения горизонтальных отклонений (в сантиметрах) от цели при стрельбе из трех ружей:

	Выстрел				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Ружье А	+1,0	+1,0	+2,0	+1,5	+2,0
Ружье Б	+1,0	0	–1,5	+1,5	–0,5
Ружье В	–0,5	–1,0	0	–1,5	–1,0

	Выстрел				
	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
Ружье А	+2,0	+1,5	+1,5	+0,5	+1,0
Ружье Б	–1,5	+2,0	+1,0	–1,0	+2,0
Ружье В	+1,0	+1,0	+1,5	+1,0	+3,0

Вычислить средние значения результатов испытания.

Решение. Для ружья А среднее равно

$$\frac{1{,}0 + 1{,}0 + 2{,}0 + 1{,}5 + 2{,}0 + 2{,}0 + 1{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 1{,}0}{10} = \frac{14{,}0}{10} = 1{,}4;$$

для ружья Б получаем:

$$\frac{1{,}0 + 0 - 1{,}5 + 1{,}5 - 0{,}5 - 1{,}5 + 2{,}0 + 1{,}0 - 1{,}0 + 2{,}0}{10} = \frac{3{,}0}{10} = 0{,}3;$$

для ружья В получаем:

$$\frac{-0{,}5 - 1{,}0 + 0 - 1{,}5 - 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}5 + 1{,}0 + 3{,}0}{10} = \frac{3{,}5}{10} = 0{,}35.$$

Ответ: 1,4; 0,3; 0,35.

Какое же из ружей более точное? Если точность оценивать только по среднему значению, то лучшим является ружье Б: среднее отклонений его выстрелов от цели ближе всего к нулю; ружье В несколько хуже, и совсем плохо пристреляно ружье А. Но если внимательно проанализировать приведенную в примере 8 таблицу построчно, то мы увидим, что практически все попадания из ружья А расположены очень «кучно», недалеко от их среднего значения 1,4. Скорее всего имеет место некоторая систематическая ошибка, но после ее исправления попадания будут концентрироваться вокруг цели с прежним, весьма небольшим разбросом. С ружьем Б дело обстоит хуже: выстрелы из него сильно рассеяны вправо и влево. Хотя в среднем ошибка и мала (всего 0,3 см), но для каждого конкретного выстрела отклонение от цели может быть достаточно большим, и, что самое неприятное, знак отклонения меняется непредсказуемо. Вывод: ружье Б ненадежно. С ружьем В, кажется, что-то случилось в процессе испытания: первые 5 выстрелов стабильно и довольно кучно располагались левее цели, а все следующие — правее, причем выстрел № 10 дал вообще самую заметную ошибку. Здесь требуется восстановить первоначальные параметры настройки ружья, а затем сделать небольшую корректировку.

Числовую характеристику данных измерения, отвечающую за разброс (рассеивание) данных вокруг их среднего значения, называют *дисперсией* (от лат. *disperses* — рассыпанный, разогнанный, рассеянный) и обозначают буквой D; число $\sigma = \sqrt{D}$ называют *средним квадратическим* отклонением. Чем меньше дисперсия D или среднее квадратическое отклонение σ, тем плотнее группируются данные измерения вокруг своего среднего значения.

Подсчет дисперсии и среднего квадратического отклонения вручную или даже с помощью калькулятора — вещь достаточно трудоемкая и требующая времени. Если вы уверенно работаете с каким-либо пакетом компьютерных программ по статистической обработке данных, то разумнее вводить данные измерения с клавиатуры и использовать соответствующие возможности программы. В любой достаточно полной современной операционной системе для персонального компьютера такие программы предусмотрены. Например, в Microsoft Office за это отвечает Microsoft Exel — программа работы с таблицами.

Опишем прямой алгоритм вычисления дисперсии D — меры рассеивания результатов измерения.

Алгоритм вычисления дисперсии

Для нахождения дисперсии D данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ измерения следует вычислить:

1) среднее значение $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;

2) отклонения данных от M, т. е. $x_1 - M$, $x_2 - M$, ..., $x_{n-1} - M$, $x_n - M$;

3) квадраты $(x_i - M)^2$ отклонений $(x_i - M)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, найденных на предыдущем шаге;

4) среднее значение всех квадратов отклонений — это и есть дисперсия D:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_{n-1} - M)^2 + (x_n - M)^2}{n};$$

$\sigma = \sqrt{D}$ — среднее квадратическое отклонение.

Пример 9. Найти дисперсию результатов измерений для ружей А и Б из примера 8.

Решение. Проведем подсчеты для испытания ружья А. Удобно собрать вычисления в таблицу. Напомним, что среднее $M = 1{,}4$ уже вычислено в примере 8.

	Выстрелы				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Результат	+1,0	+1,0	+2,0	+1,5	+2,0
Отклонение	–0,4	–0,4	0,6	0,1	0,6
Квадрат отклонения	0,16	0,16	0,36	0,01	0,36

	Выстрелы				
	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
Результат	+2,0	+1,5	+1,5	+0,5	+1,0
Отклонение	0,6	0,1	0,1	–0,9	–0,4
Квадрат отклонения	0,36	0,01	0,01	0,81	0,16

$$D = \frac{0{,}16 \cdot 3 + 0{,}36 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}81}{10} = \frac{2{,}4}{10} = 0{,}24; \ \sigma = \sqrt{D} \approx 0{,}5.$$

Аналогично поступим с результатами испытания ружья Б; здесь $M = 0{,}3$:

	Выстрелы				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Ружье Б	+1,0	0	–1,5	+1,5	–0,5
Отклонение	0,7	–0,3	–1,8	1,2	–0,8
Квадрат отклонения	0,49	0,09	3,24	1,44	0,64

	Выстрелы				
	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
Ружье Б	–1,5	+2,0	+1,0	–1,0	+2,0
Отклонение	–1,8	1,7	0,7	–1,3	1,7
Квадрат отклонения	3,24	2,89	0,49	1,69	2,89

$$D = \frac{0{,}49 \cdot 2 + 3{,}24 \cdot 2 + 2{,}89 \cdot 2 + 0{,}09 + 1{,}44 + 0{,}64 + 1{,}69}{10} =$$

$$= \frac{17{,}1}{10} = 1{,}71, \ \sigma = \sqrt{D} \approx 1{,}31.$$

Мы видим, что дисперсии различаются более чем в 7 раз, а среднее квадратическое отклонение для испытаний ружья Б почти в 3 раза превышает среднее квадратическое для испытаний ружья А. Грубо говоря, ружье Б стреляет с разбросом в три раза больше, нежели ружье А.

§ 51. Простейшие вероятностные задачи

Рассмотрим два автомобиля: первый, настоящий, ездит по реальной, не слишком ровной дороге, останавливается перед светофором, тормозит на поворотах и перед постом ДПС, стоит в пробках и т. д.; второй — автомобиль из текстовой задачи на составление уравнений, который движется, никуда не сворачивая, по прямолинейному шоссе из пункта А в пункт Б с постоянной скоростью. В первом случае мы имеем дело с реальностью, а во втором — с некоторым идеальным представлением об этой реальности, с простейшей моделью движения настоящего автомобиля. Именно простота позволяет нам применять математические методы исследования модели. Если попробовать как-то точнее приблизиться к реальности, усложнить модель, то и условия задач, и способы их решения сильно усложнятся. Для математического исследования тогда придется использовать значительно более сложные понятия и факты, чем те, которые входят в школьную программу.

Рассмотрим две монеты. Одна — настоящая, которую вы можете подержать в руке, которая может быть слегка помятой, старой или совсем новой, иметь массу, несколько отличающуюся от массы эталона, и т. п. При реальном подбрасывании эта монета может упасть «орлом» или «решкой», может остановиться, прикоснувшись к ножке стула, может укатиться, ее может кто-то схватить и убежать и т. д. Вторая — монета из какой-либо текстовой задачи. Она идеально круглая, симметричная, абсолютно однородная, может упасть только «орлом» или «решкой» и, что самое главное, оба эти исхода равновозможны (равновероятны) между собой. Как и в случае с автомобилями, мы имеем дело с реальным объектом и некоторой идеальной моделью этого объекта. Простота этой модели позволяет нам сравнительно легко изучать различные *случайные события* и подсчитывать *вероятности* наступления этих событий.

При статистической обработке информации, как правило, имеют дело с конкретными данными реально проведенных измерений и изучают события, уже происшедшие в действительности (см. § 50). В теории вероятностей изучают различные *модели* случайных событий, их свойства и числовые характеристики. Как в рассмотренных примерах про автомобили и монеты теория вероятностей, в отличие от статистической обработки информации, имеет дело с некоторыми идеальными представлениями о реальных событиях.

Самый простой и наиболее известный способ подсчета вероятностей наступления тех или иных случайных событий дает *классическое определение вероятности* (с ним вы знакомились в курсе алгебры основной школы). Напомним его.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Непросто сразу понять и запомнить эту довольно длинную фразу. При решении задач удобнее использовать формулировку в виде алгоритма, схемы конкретных действий.

Алгоритм нахождения вероятности случайного события

Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого испытания следует найти:

1) число N всех возможных исходов данного испытания;

2) количество $N(A)$ тех исходов, в которых наступает событие A;

3) частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.

Принято вероятность события A обозначать так: $P(A)$[1]. Значит, $P(A) = \frac{N(A)}{N}$. Напомним, что применять это правило можно *только в предположении о равновозможности* всех исходов испытания.

Одному ученику был задан вопрос: «Какова вероятность выпадения тройки при одном бросании кубика?» Ученик ответил так: «Вероятность равна 0,5». И объяснил свой ответ: «Тройка или выпадет, или нет. Значит, всего есть два исхода и ровно в одном наступает интересующее нас событие. Получаем ответ $\frac{1}{2}$». Есть в этом рассуждении ошибка? Ее *почти нет*! Действительно, тройка или выпадет, или нет, т. е. при таком определении исхода бросания $N = 2$. Верно и то, что $N(A) = 1$ и, разумеется, что $\frac{1}{2} = 0{,}5$. А вот равновозможность указанных двух исходов бросания кубика вызывает большие сомнения. Конечно, «чисто юридически» мы имеем право считать, что выпадение тройки равновероятно ее невыпадению. Но вот можем ли мы так считать, не нарушая свои же естественные предположения об «одинаковости» граней кубика? Конечно, нет! Здесь мы имеем дело с правильным рассуждением внутри некоторой модели. Только вот сама эта модель «неправильная», т. е. плохо соответствует реальному явлению.

Рассмотрим несколько примеров подсчета вероятностей.

Пример 1. Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет: а) пять очков; б) четное число очков; в) число очков больше четырех; г) число очков, не кратное трем.

---

[1] Объяснение такого обозначения очень простое: «вероятность» по-французски — *probabilite*, по-английски «вероятно» — *probably*; как видите, в обоих случаях слово начинается с буквы *р*.

Р е ш е н и е. Всего имеется $N = 6$ возможных исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6. Мы считаем, что ни один из них не имеет никаких преимуществ перед другими, т. е. *принимаем* предположение о равновозможности этих исходов.

а) Ровно при одном из исходов произойдет интересующее нас событие A — выпадение пяти очков. Значит, $N(A) = 1$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{6}$.

б) Интересующее нас событие B произойдет ровно в трех случаях: когда выпадет 2, 4 или 6. Значит, $N(B) = 3$ и $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

в) Интересующее нас событие C произойдет ровно в двух случаях, когда выпадет 5 или 6. Значит, $N(C) = 2$ и $P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

г) Из шести возможных выпавших чисел четыре (1, 2, 4, и 5) не кратны трем, а остальные два (3 и 6) делятся на три. Значит, интересующее нас событие наступает ровно в четырех из шести возможных и равновероятных между собой исходах опыта. Поэтому в ответе получается $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Ответ: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$.

При подсчете вероятности часто используется правило умножения, знакомое вам из курса алгебры основной школы. Напомним это правило.

Правило умножения

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

Пример 2. Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков: а) равна 1; б) меньше 13; в) меньше 5; г) меньше 10.

Р е ш е н и е. а) Минимально возможная сумма очков равна 2, так что сумма никак не может быть равной 1. Значит, $N(A) = 0$ и $P(A) = 0$.

б) Максимально возможное значение суммы очков равно 12. Это произойдет, если выпали 6 и 6. Значит, интересующее нас событие произойдет при любом исходе нашего опыта. Поэтому $N(A) = N$ и $P(A) = 1$.

в) При каждом бросании кубика возможны 6 исходов. Предполагается, что результаты бросаний *независимы* друг от друга. По правилу умножения получаем, что данный опыт имеет $N = 6 \cdot 6 = 36$ исходов. Они предполагаются равновозможными между собой.

Перечислим все те исходы, в которых наступает интересующее нас событие A. Таких исходов ровно 6: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (1; 3), (3; 1). Значит, $N(A) = 6$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

г) Вместо подсчета тех исходов, в которых наступает интересующее нас событие A, перечислим те исходы, в которых оно *не наступает*, т. е. те исходы, в которых сумма очков равна 10, 11 или 12. Таких исходов ровно 6: (4; 6), (6; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 5), (6; 6). Значит, $N(A) = 36 - 6 = 30$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{6}$.

Каждый из пунктов примера 2 интересен по-своему. В пункте а) мы имеем дело с **невозможным** событием. Так называют событие, которое никогда не наступает при проведении данного испытания, его вероятность равна нулю. В пункте б), наоборот, событие обязательно наступит в данном испытании. Такое событие называют **достоверным.** Вероятность достоверного события равна единице. В пункте в) мы использовали правило умножения. Наконец, в пункте г) нам оказалось удобнее перейти к **противоположному** событию. Так называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда *не наступает* интересующее нас событие. Вероятность $P(A)$ события A и вероятность $P(\bar{A})$ противоположного ему события $\bar{A}$ связаны следующим соотношением:

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1.}$$

Пример 3. Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число: а) не оканчивается нулем; б) состоит из различных цифр; в) не является квадратом целого числа; г) не делится на 17.

Решение. Всего имеется 90 двузначных чисел (от 10 до 99), т. е. в данном случае $N = 90$.

а) Пусть A — интересующее нас событие, а $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Событие $\bar{A}$ состоит в том, что число оканчивается нулем. Таких чисел ровно девять: 10, 20, 30, ..., 80, 90. Значит, $N(\bar{A}) = 9$, $P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N} = \frac{9}{90} = 0{,}1$ и $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}9$.

б) Пусть A — интересующее нас событие, а $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Оно состоит в том, что число состоит из одинаковых цифр. Таких чисел ровно девять: 11, 22, 33, ..., 88, 99. Значит, $N(\bar{A}) = 9$, $P(\bar{A}) = \frac{9}{90} = 0{,}1$ и $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}9$.

в) Следует найти $P(\bar{A})$, где событие A состоит в том, что число является квадратом целого числа. Таких двузначных чисел ровно шесть: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Значит,

$$N(A) = 6,\ P(A) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15},\ P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{14}{15}.$$

г) Следует найти $P(\bar{A})$, где событие A состоит в том, что число делится на 17. Таких двузначных чисел ровно пять: 17, 34, 51, 68, 85. Значит, $N(A) = 5$, $P(A) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{17}{18}$.

Ответ: а) 0,9; б) 0,9; в) $\frac{14}{15}$; г) $\frac{17}{18}$.

Пример 4. Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному натуральному числу. Найдите вероятность того, что: а) эти два числа различны; б) сумма чисел равна 100; в) сумма чисел не больше 25; г) сумма чисел больше 190.

Решение. Каждый из учеников *независимо* друг от друга выбирает одно число из 90 двузначных. По правилу умножения всего $N = 90 \cdot 90$ исходов такого выбора.

а) Случаев, когда эти два числа совпадут между собой, ровно 90: это пары (10; 10), (11; 11), ..., (99; 99). Значит, интересующее нас событие A произойдет в $N(A) = 90 \cdot 90 - 90$ случаях. По формуле подсчета вероятности получаем:

$$P(A) = \frac{90 \cdot 90 - 90}{90 \cdot 90} = 1 - \frac{1}{90} = \frac{89}{90} \approx 0{,}989.$$

б) Если первый ученик выбрал число от 10 до 90, то интересующее нас событие произойдет, как только второй выберет недостающее до 100 слагаемое. Если первый выбрал число, большее 90 (таких чисел 9), то при любом выборе второго сумма окажется больше 100, т. е. интересующее нас событие не произойдет. В остальных случаях у второго ученика имеется по одной возможности составить сумму 100. Значит,

$$N(A) = 90 - 9 = 81,\ P(A) = \frac{81}{90 \cdot 90} = 0{,}01.$$

в) Выполним перебор случаев. Если первый ученик выбрал 10, то второй может выбрать любое число от 10 до 15. Всего 6 случаев. Если первый выбрал 11, то второй может выбрать любое число от 10 до 14. Всего 5 случаев. Для 12 будет 4 случая, для 13 — три, для 14 — два. Если первый выбрал 15, то второй может выбрать только 10, т. е. имеется один случай. Если первый выбрал число, большее 15, то у второго ученика выбора нет: сумма всегда будет больше 25. Значит, интересующее нас событие произойдет в $N(A) = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ случае, и потому

$$P(A) = \frac{21}{90 \cdot 90} = \frac{7}{2700} \approx 0{,}0026.$$

г) Выполним перебор случаев. Если первый ученик выбрал число от 10 до 91, то при любом выборе второго сумма не будет больше 190, поскольку даже $91 + 99 = 190$. Если первый выбрал 92, то второй может выбрать только 99: один вариант. Если первый выбрал 93, то второй может выбрать или 98, или 99: два варианта; и т. д. Если первый выбрал 99, то второй может выбрать любое число от 92 до 99: восемь вариантов. Значит, интересующее нас событие произойдет в $N(A) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 +$ $+ 8 = 36$ случаях, и потому $P(A) = \dfrac{36}{90 \cdot 90} = \dfrac{1}{225} \approx 0{,}0044.$

Ответ: а) 0,989; б) 0,01; в) 0,0026; г) 0,0044.

Как мы видим, вычисление значений N и $N(A)$ представляет определенные сложности. Прямое перечисление (выписывание, перебор) всех возможностей можно провести лишь в сравнительно небольшом количестве задач. Для подсчета количества различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, используются методы и факты *комбинаторики*.

Довольно часто говорят, что основы комбинаторики и теории вероятностей создали и разработали французские математики XVII века Пьер Ферма и Блез Паскаль. Невольно складывается впечатление, что Ферма и Паскаль как-то собравшись вместе сначала приняли решение создать новую теорию, а затем, в соответствии с неким разработанным планом, осуществили задуманное. Конечно, это не так! Не было никакого совместного плана, и теория, как мы ее сейчас представляем, по-настоящему появилась существенно позже. Просто Ферма и Паскаль решали интересные задачи и в переписке между собой и с другими математиками обсуждали подходы к их решению, полученные результаты, связь с другими задачами, возможности применения в новых ситуациях и т. п.

Рассмотрим задачу, которую не без основания можно отнести к задачам, с которых началось развитие теории вероятностей или, как еще тогда говорили, *комбинаторного анализа.* Ее предложил Паскалю кавалер де Мере — весьма влиятельный деятель при дворе короля Людовика XIV.

Пример 5. Игральную кость бросают четыре раза. Что более вероятно: то, что шестерка появится хотя бы один раз, или же, что шестерка не появится ни разу?

Решение. По правилу умножения при четырехкратном бросании игральной кости всего $N = 6^4$ исходов. Сама формулировка задачи ясно указывает на то, что мы имеем дело с парой противоположных друг другу событий. Что же обозначить A, а что — $\bar{A}$? То событие, вероятность которого проще сосчитать, удобно обозначить A. Для появления шестерки хотя бы один раз есть очень много различных ситуаций: шестерка при третьем бросании, шестерка при первом и четвертом бросаниях и т. п. Не очень ясно, как их все пересчитать. Мы и не будем этого делать.

Пусть A — событие, состоящее в том, что шестерка не появится ни разу. Это означает, что при каждом из четырех бросаний имеется ровно *пять* исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5. По правилу умножения находим, что $N(A) = 5^4$. Значит,

$$P(A) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} \approx 0{,}4823;\ P(\bar{A}) = 1 - P(A) \approx 0{,}5177.$$

Таким образом, вероятность события $\bar{A}$ немного, но больше, чем 0,5.

Ответ: появление хотя бы одной шестерки более вероятно, чем полное отсутствие шестерок при четырех бросаниях игральной кости.

Между прочим, для трех бросаний ответ получится другой:

$$P(A) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787 > 0{,}5 > P(\bar{A}).$$

В следующем параграфе мы поговорим о комбинаторике — разделе математики, без использования которого невозможно решение большинства задач по теории вероятностей.

§ 52. Сочетания и размещения

Правило умножения, которое мы использовали в предыдущем параграфе, применимо не только к двум, но и к трем, четырем и т. д. испытаниям. Если перемножить числа исходов испытаний, то в ответе получится число всех исходов независимого проведения этих испытаний. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Учительница подготовила к контрольной работе 4 примера на решение линейных неравенств, 5 текстовых задач (две на движение и три на работу) и 6 примеров на решение квадратных уравнений (в двух из них дискриминант отрицателен). В контрольной должно быть по одному на каждую из трех тем. Найти общее число:

а) всех возможных вариантов контрольной;

б) тех возможных вариантов, в которых встретится задача на движение;

в) тех возможных вариантов, в которых у квадратного уравнения будут корни;

г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

Решение. а) При выборе неравенства есть 4 исхода, при выборе текстовой задачи есть 5 исходов, при выборе квадратного уравнения есть 6 исходов. По правилу умножения получаем, что число всех вариантов контрольной работы равно $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

б) В предыдущем рассуждении меняется число исходов при выборе текстовой задачи: их всего два. Значит, можно составить $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ вариантов такой контрольной работы.

в) По сравнению с пунктом а) меняется число исходов при выборе уравнения: только в четырех случаях корни есть. Значит, можно составить $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ вариантов такой контрольной работы.

г) Из общего числа вариантов (120) мы вычтем те варианты, в которых встретятся *одновременно* и задача на работу, и квадратное уравнение, не имеющее корней. По сравнению с пунктом а) для них меняется число исходов при выборе текстовой задачи (3 варианта) и число исходов при выборе уравнения (только в двух случаях корней нет). Значит, можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта такой контрольной, работы, а условию задачи удовлетворяют остальные $120 - 24 = 96$ вариантов.

Ответ: а) 120; б) 48; в) 80; г) 96.

Пример 2. Известно, что $x = 2^a3^b5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x.

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет четных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

Решение. а) Наименьшее число получится, когда $a = b = c = 0$. Тогда $x = 2^03^05^0 = 1$. Наибольшее число получится, когда $a = b = c = 3$. Тогда $x = 2^33^35^3 = 27 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 27\,000$.

б) Рассмотрим три испытания: выбор числа a, выбор числа b и выбор числа c. Они независимы друг от друга, и в каждом имеется по четыре исхода. По правилу умножения получаем, что всего возможны $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ варианта.

в) Число $x = 2^a 3^b 5^c$ будет четным только в тех случаях, когда $a > 0$, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора числа a есть три исхода. Снова применим правило умножения. Получим $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ вариантов.

г) Число $x = 2^a 3^b 5^c$ будет оканчиваться нулем только в тех случаях, когда среди множителей есть хотя бы одна двойка и есть хотя бы одна пятерка, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$ и $c \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора чисел a и c есть по три исхода. Снова применим правило умножения. Получим $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ вариантов.

Ответ: а) 1 и 27 000; б) 64; в) 48; г) 36.

В курсе алгебры 9-го класса вы познакомились с понятием факториала и теоремой о перестановках. Напомним их.

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют **«эн факториал»**:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Значения $n!$ очень быстро возрастают с увеличением n:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	$1 \cdot 2 = 2$	$2! \cdot 3 = 6$	$3! \cdot 4 = 24$	$4! \cdot 5 = 120$	$5! \cdot 6 = 720$	$6! \cdot 7 = 5040$

Теорема 1. **n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.**

Как правило, эту теорему записывают в виде краткой формулы:

$$P_n = n!.$$

P_n — это число перестановок из n различных элементов[1], оно равно $n!$.

Пример 3. К хозяину дома пришли гости A, B, C, D. За круглым столом — пять разных стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?

в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя C следует посадить рядом с гостем A?

г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя A не следует сажать рядом с гостем D?

---

[1] Буква P в этом сокращении взята от первой буквы английского слова *permute* (*permutation*), что переводится как *переставлять* (*перестановка*).

Решение. а) На 5 стульев должны сесть 5 человек (включая хозяина дома). Значит, всего имеется P_5 способов их рассаживания: $P_5 = 5! = 120$.

б) Так как место хозяина фиксировано, то следует рассадить четырех гостей на четыре места. Это можно сделать $P_4 = 4! = 24$ способами.

в) Сначала выберем место для гостя A. Возможны 5 вариантов. Если место гостя A уже известно, то гостя C следует посадить или справа, или слева от A, всего 2 варианта. После того как места для A и C уже выбраны, нужно трех человек произвольно рассадить на 3 оставшихся места: $P_3 = 3! = 6$ вариантов. Остается применить правило умножения: $5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$.

г) Решение такое же, как и в пункте в). Место для гостя D после выбора места для A можно также выбрать двумя способами: на два отдаленных от A стула.

Ответ: а) 120; б) 24; в) 60; г) 60.

Пример 4. В чемпионате по футболу участвовало 7 команд. Каждая команда сыграла по одной игре с каждой командой. Сколько всего было игр?

Решение. <u>Первый способ.</u> Рассмотрим таблицу 7×7 , в которую вписаны результаты игр. В ней 49 клеток:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3 : 1	0 : 5	2 : 2	0 : 0	1 : 0	1 : 3
2			4 : 3	1 : 0	1 : 0	0 : 0	1 : 1
3				1 : 3	1 : 0	1 : 2	0 : 0
4					1 : 1	1 : 1	1 : 4
5						1 : 0	0 : 0
6							2 : 2
7							

По диагонали клетки закрашены, так как никакая команда не играет сама с собой. Если убрать диагональные клетки, то останется $7^2 - 7 = 42$ клетки. В нижней части результатов нет, потому что все они получаются отражением уже имеющихся результатов из верхней части таблицы (не 3 : 1, а 1 : 3, не 1 : 4, а 4 : 1 и т. д.; результаты 0 : 0, 1 : 1 и т. д. дублируются). Поэтому количество всех проведенных игр равно половине от 42, т. е. 21.

<u>Второй способ.</u> Произвольно пронумеруем команды № 1, № 2, ..., № 7 и посчитаем число игр поочередно. Команда № 1

встречается с командами № 2—7 — это 6 игр. Команда № 2 тоже проведет 6 встреч, но одну игру, с командой № 1, мы уже посчитали. Получается всего 5 новых игр. Команда № 3 проведет 6 встреч, из которых две, с командами № 1 и 2, уже посчитаны. Значит, добавятся еще 4 игры. Продолжая, получаем:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.$$

Третий способ. Используем геометрическую модель: 7 команд — это вершины выпуклого семиугольника, а отрезок между двумя вершинами — это встреча двух соответствующих команд: сколько отрезков — столько игр. Из каждой вершины выходит 6 отрезков. Получается $7 \cdot 6$ отрезков, каждый из которых посчитан дважды: и как AB, и как BA. Значит, всего проведен $7 \cdot 3 = 21$ отрезок.

Ответ: 21 игра.

Проанализируем решение примера 4. Состав игры определен, как только мы *выбираем две* команды. Значит, количество всех игр в турнире для n команд — это в точности количество всех *выборов двух элементов из n данных* элементов. Важно при этом то, что порядок выбора не имеет значения, т. е. если выбрано две команды, то какая из них первая, а какая вторая — не существенно.

Первую команду можно выбрать n способами, а вторую — $(n - 1)$ способами. По правилу умножения получаем $n(n - 1)$. Но при этом состав каждой игры посчитан дважды. Значит, число игр равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Тем самым фактически доказана следующая теорема.

Теорема 2 (о выборе двух элементов). **Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести $\frac{n(n-1)}{2}$ способами.**

Достаточно длинный словесный оборот «число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных» неудобен при постоянном использовании в решении задач. Математики поступили просто: ввели новый термин и специальное обозначение.

Определение 2. Число всех выборов двух элементов *без учета их порядка* из n данных элементов называют **числом сочетаний из n элементов по 2** и обозначают C_n^2.

Символ C_n^2 читается в русской транскрипции так: «цэ из эн по два». Буква C хорошо согласуется здесь «и с французским, и с нижегородским»: с одной стороны, C — это первая буква слова *combinations*, с другой стороны, C — это первая буква слова *сочетание*.

Учитывая сказанное, теорему о выборе двух элементов без учета их порядка можно записать в виде краткой формулы

$$\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

Пример 5. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было: а) между футболистами; б) между хоккеистами; в) между футболистами и хоккеистами; г) всего?

Решение. а) $C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$

б) $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$

в) Будем действовать по правилу умножения. Одно испытание — выбор футболиста, а другое испытание — выбор хоккеиста. Испытания предполагаются независимыми, и у них соответственно 11 и 6 исходов. Значит, получится $11 \cdot 6 = 66$ игр.

г) Можно сложить все предыдущие ответы: $55 + 15 + 66 = 136$; но можно использовать и формулу для числа сочетаний: $C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136.$ ◀

А что получится, если мы *будем учитывать порядок* двух выбираемых элементов? По правилу умножения получаем следующую теорему.

Теорема 3. **Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n-1)$ способами.**

Доказательство. Первый по порядку элемент можно выбрать n способами. Из оставшихся $(n-1)$ элементов второй по порядку элемент можно выбрать $(n-1)$ способом. Так как два этих испытания (выбора) независимы друг от друга, то по правилу умножения получаем $n(n-1)$. ●

Определение 3. Число всех выборов двух элементов *с учетом их порядка* из n данных называют **числом размещений из n элементов по 2** и обозначают A_n^2.

Пример 6. В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй — по геометрии; б) они должны быстро стереть с доски?

Р е ш е н и е. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, ответы таковы:

а) $A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702$; б) $C_{27}^2 = \dfrac{27 \cdot 26}{2} = 351$. ◀■

Подведем итоги для числа выборов двух элементов из n данных.

Сочетания из n элементов по 2: $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$	Размещения из n элементов по 2: $A_n^2 = n(n-1)$

А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс 2 заменить на 3, 4, ... и вообще на произвольное число k, $1 \leqslant k \leqslant n$? Здесь мы переходим к основному вопросу параграфа — к выборам, состоящим из произвольного числа элементов. Вот типичные вопросы: сколькими способами можно выбрать 5 учеников из 30 для дежурства в столовой; актив класса (староста, культорг, редактор стенгазеты, организатор спортивных мероприятий) — 4 человека из 30; 7 монет из 10 данных монет; 10 карт из колоды в 32 карты и т. п. Удобно, как и выше, ввести специальные термины и специальные обозначения.

Определение 4. Число всех выборов k элементов из n данных *без учета порядка* называют **числом сочетаний из n элементов по k** и обозначают C_n^k. Число всех выборов k элементов из n данных *с учетом их порядка* называют **числом размещений из n элементов по k** и обозначают A_n^k.

Используя эти обозначения, нетрудно записать ответы на поставленные выше вопросы: 5 учеников из 30 для дежурства в столовой можно выбрать C_{30}^5 способами; 7 монет из 10 данных монет можно выбрать C_{10}^7 способами; 10 карт из колоды в 32 карты можно выбрать C_{32}^{10} способами. В этих случаях порядок не важен, и поэтому мы используем *сочетания*. А вот для состава актива класса важно, кто именно будет старостой, кто — культоргом, кто — редактором стенгазеты и кто будет отвечать за спорт. Поэтому следует использовать *размещения*: нужный выбор (4 человека из 30) можно произвести A_{30}^4 способами.

Однако нам важна не столько формульная запись ответа, сколько его конкретное числовое значение.

***Теорема 4.* Для любых натуральных чисел n и k, таких, что $k < n$, справедливы соотношения:**

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \tag{1}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{2}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}, \tag{3}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Доказательство. 1) Нам следует поочередно выбирать k элементов из n данных. Проведем независимо k следующих испытаний. Первое из них состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 1. Это испытание имеет n исходов. После проведения первого испытания проведем второе. Оно состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 2. Так как один элемент из n данных уже выбран, то осталось $(n - 1)$ непронумерованных элементов. Значит, второе испытание имеет $(n - 1)$ исход. После проведения двух испытаний проводится третье, в результате которого один из оставшихся $(n - 2)$ элементов получит № 3, и т. д. В последнем, k-м испытании, будет $(n - (k - 1))$ исходов, так как в предыдущих испытаниях выбран $(k - 1)$ элемент. Остается применить правило умножения. Получим:

$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

2) $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3) Достаточно проверить, что $k! \cdot C_n^k = A_n^k$. Будем проводить выбор k элементов с учетом порядка в два этапа. Сначала выберем их «кучей», без учета порядка. Число вариантов здесь по определению, равно C_n^k. На втором этапе будем упорядочивать, т. е. нумеровать по порядку выбранные k элементов всеми возможными способами. Но число таких нумераций (перестановок) равно $P_k = k!$. Значит, каждому неупорядоченному выбору k элементов из n данных соответствует $k!$ упорядоченных выборов. При этом каждый упорядоченный выбор будет посчитан ровно один раз. Следовательно, $k! \cdot C_n^k = A_n^k$.

4) Это — очевидное следствие формул 3) и 2). ●

Заметим, что при $k = 2$ получаются уже известные формулы из теорем 2 и 3. Действительно, по формуле (1) получаем

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Используя формулы (3) и (1), получаем:

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример 7. В классе 27 учеников, из них нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу, второй — сходить за мелом, третий — пойти дежурить в столовую; б) им следует спеть хором?

Р е ш е н и е. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, в первом случае получим A_{27}^3, во втором — C_{27}^3.

а) $A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550;$

б) $C_{27}^3 = \dfrac{A_{27}^3}{3!} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9 \cdot 13 \cdot 25 = 2925.$ ◁■

Пример 8. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили выбрать 4 любых инструмента из имеющихся 11.

а) Найти число всевозможных выборов инструментов.

б) Найти число всевозможных рассаживаний участников квартета с выбранными четырьмя инструментами (инструменты, как в басне Крылова, занимают четко отведенные позиции).

в) Сколько всего различных инструментальных составов квартета может получиться?

Р е ш е н и е. а) Требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных без учета порядка, т. е. число сочетаний из 11 элементов по 4:

$$C_{11}^4 = \frac{A_{11}^4}{4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330.$$

б) Это уже знакомая нам задача про рассаживание четырех субъектов на 4 места. Найдем число перестановок:

$$P_4 = 4! = 24.$$

в) Каждый инструментальный состав квартета получается в результате проведения двух независимых испытаний: первое — из пункта а), второе — из пункта б). По правилу умножения получаем:

$$C_{11}^4 \cdot P_4 = 330 \cdot 24 = 7920.$$

Впрочем, ответ можно получить и без использования пунктов а) и б). Действительно, можно считать, что выбор инструментов происходит поочередно: первой выбирает Мартышка, потом Осел, Козел и Мишка. Значит, требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных с учетом порядка, т. е. число размещений из 11 элементов по 4:

$$A_{11}^4 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920.$$

Ответ: а) 330; б) 24; в) 7920.

Теперь посмотрим на число C_n^k при $k = n$. По определению C_n^n — это количество выборов n элементов из n данных. Но такой выбор единственный — надо взять все множество целиком; значит, $C_n^n = 1$. А если к этому случаю применить формулу из теоремы 4, то получается:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!}.$$

Что же такое «ноль факториал»? Математики поступили просто. Чтобы сохранить красивую формулу для чисел C_n^k при любых целочисленных значениях k ($0 \leqslant k \leqslant n$), решили *по определению* считать, что $0! = 1$. Тогда

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1,$$

что отлично согласуется с комбинаторным определением C_n^n.

При такой договоренности понятный смысл имеет и C_n^0; получается:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

Действительно, 0 элементов из n данных можно «выбрать» единственным способом, ничего не выбирая.

У теоремы 4 есть ряд важных следствий. Рассмотрим одно из них: *справедлива формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В самом деле,

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Как видите, числители в обоих случаях одинаковы, а в знаменателе множители меняются местами, что, естественно, не отражается на числовом значении выражения.

В чем польза полученной формулы? Представьте себе, что надо вычислить C_{15}^{13}. Если использовать равенство $C_{15}^{13} = C_{15}^2$, то вычисления упростятся: $C_{15}^2 = \dfrac{15 \cdot 14}{2!} = 105$.

Для чисел C_n^k имеется красивый и удобный способ их записи в виде *треугольной таблицы* — ее называют *треугольником Паскаля.* Приведем эту таблицу:

$C_1^0 \quad C_1^1$	$1 \quad 1$
$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$	$1 \quad 2 \quad 1$
$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$
$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$	$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$
....	....

Основная закономерность образования строк состоит в следующем: *каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке* ($5 = 1 + 4$, $10 = 4 + 6$; $6 = 3 + 3$ и т. д.). В общем виде (в виде формулы) это свойство записывается так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Например, C_6^4 можно вычислить непосредственно по пятой строке треугольника Паскаля: $C_6^4 = C_5^4 + C_5^3 = 5 + 10 = 15$.

Докажем, что $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$. Имеем

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!^{\llcorner n-k}}{k!\cdot(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!^{\llcorner k}}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k. \qquad \bullet$$

§ 53. Формула бинома Ньютона

Известно, что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Умножив обе части этого тождества на $(a + b)$, получим: $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Аналогично умножив обе части тождества $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ на $(a + b)$, получим: $(a + b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Итак,

$(a + b)^1 = a + b$;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Проанализируем полученные формулы. Замечаем, во-первых, что в правой части любой из формул сумма показателей при переменных в каждом одночлене равна показателю двучлена в левой части. Например, в последней формуле двучлен возводится в четвертую степень и сумма показателей при a и b в каждом слагаемом в правой части равна 4. Впрочем, это понятно, ведь $(a + b)^4$ — это $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$ и после раскрытия скобок получится многочлен, состоящий из одночленов a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4 с некоторыми коэффициентами.

Замечаем, во-вторых, что коэффициенты при одночленах в правых частях формул ассоциируются с треугольником Паскаля, о котором мы говорили в § 52. Сравните числа, имеющиеся в первых четырех строках треугольника, с соответствующими коэффициентами при одночленах в каждой из четырех формул. Полное совпадение.

Естественно предположить, что подмеченная закономерность сохранится и в общем случае, т. е. для любого натурального значения n верна следующая формула:

$$(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots +$$
$$+ C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим произведение n двучленов $(a + b)(a + b)(a + b) \cdot \ldots \cdot (a + b)$ и докажем, что коэффициент при одночлене $a^{n-k}b^k$ равен C_n^k.

В самом деле, чтобы, раскрыв скобки, получить одночлен вида $a^{n-k}b^k$, нужно из n множителей вида $(a + b)$ выбрать k множителей (порядок не важен), откуда берется переменная b; тогда автоматически из оставшихся $n - k$ множителей будет взята переменная a. Но выбрать k множителей из n имеющихся без учета порядка можно C_n^k способами, что и требовалось доказать. ●

Формулу (1) обычно называют **формулой бинома Ньютона** (*бином* — двучлен), а коэффициенты C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^k, ..., C_n^{n-1}, C_n^n — *биномиальными коэффициентами.*

Пример. Раскрыть скобки в выражении: а) $(x + 1)^6$; б) $(a^2 - 2b)^5$.

Решение. а) Применим формулу (1), считая, что $a = x$, $b = 1$, $n = 6$. Получим:

$$(x + 1)^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5 \cdot 1 + C_6^2x^4 \cdot 1^2 + C_6^3x^3 \cdot 1^3 +$$
$$+ C_6^4x^2 \cdot 1^4 + C_6^5x \cdot 1^5 + C_6^6 \cdot 1^6.$$

Осталось вычислить биномиальные коэффициенты:

$$C_6^0 = C_6^6 = 1;\ C_6^1 = C_6^5 = 6;\ C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15;$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20.$$

Таким образом, $(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

б) Применим формулу (1), считая, что в роли a выступает $2a^2$, а в роли b выступает $-2b$. Получим:

$$(a^2 - 2b)^5 = C_5^0(a^2)^5 + C_5^1(a^2)^4(-2b) + C_5^2(a^2)^3(-2b)^2 +$$
$$+ C_5^3(a^2)^2(-2b)^3 + C_5^4(a^2)(-2b)^4 + C_5^5(-2b)^5.$$

Осталось вычислить биномиальные коэффициенты:

$$C_5^0 = C_5^5 = 1;\ C_5^1 = C_5^4 = 5;\ C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10.$$

Таким образом, $(a^2 - 2b)^5 = a^{10} - 10a^8b + 40a^6b^2 - 80a^4b^3 + 80a^2b^4 - 32b^5$.

В заключение получим одно любопытное свойство биномиальных коэффициентов. Составим формулу бинома Ньютона для выражения $(x + 1)^n$ (подобно тому, как в рассмотренном примере мы применили формулу бинома Ньютона к выражению $(x + 1)^6$). Получим:

$$(x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} +$$
$$+ C_n^3 x^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} x + C_n^n.$$

Если в этом тождестве положить $x = 1$, то получим:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

§ 54. Случайные события и их вероятности

В теории вероятностей и математической статистике строятся и исследуются модели различных ситуаций, связанных с понятием *случайности*. Один из основателей математической статистики шведский ученый Гаральд Крамер писал так: «По-видимому, невозможно дать точное определение того, что подразумевается под словом “случайный”. Смысл этого слова лучше всего разъяснить на примерах».

В § 51 мы последовали этому совету и разобрали простейшие вероятностные задачи. После знакомства с основными формулами комбинаторики можно переходить к более сложным задачам.

1. Использование комбинаторики для подсчета вероятностей

Пример 1. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что среди них: а) нет пиковой дамы; б) есть пиковая дама?

Решение. У нас имеется множество из 36 элементов — игральных карт. Мы производим выбор трех элементов, порядок выбора не важен. Значит, имеется $N = C_{36}^3$ исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предполагать, что все эти исходы равновероятны между собой.

а) Среди всех N исходов нам следует сосчитать те, в которых нет пиковой дамы (событие A). Поэтому отложим даму пик в сторону и будем выбирать три карты из оставшихся 35 карт. Получатся все интересующие нас варианты: $N(A) = C_{35}^3$. Осталось вычислить нужную вероятность:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{35}^3}{C_{36}^3} = \frac{35!}{3! \cdot 32!} \cdot \frac{3! \cdot 33!}{36!} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

При вычислениях мы учли, что $33! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 32 \cdot 33 = 32! \cdot 33$, а $36! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 35 \cdot 36 = 35! \cdot 36$.

б) Вычислим вероятность противоположного события $\bar{A}$ (есть дама пик) по формуле из § 51:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{12}.$$

Ответ: а) $\frac{11}{12}$; б) $\frac{1}{12}$.

Пример 2. В урне лежит 10 белых и 11 черных шаров. Случайным образом достают пять шаров. Какова вероятность того, что:

а) среди этих пяти шаров ровно три белых;

б) среди них не менее четырех белых шаров;

в) большинство шаров — белые?

Решение. Считаем шары в урне неразличимыми на ощупь. Из 21 шара случайным образом производят выбор пяти шаров. Порядок выбора не важен. Значит, существует $N(A) = C_{21}^5$ способов такого выбора.

а) Интересующее нас событие A наступает, когда три из пяти шаров — белые, а два оставшихся — черные, т. е. когда из 10 белых шаров оказались выбранными 3 шара, а из 11 черных шаров — 2 шара. Из 10 белых шаров 3 шара можно выбрать C_{10}^3 способами, а из 11 черных шаров 2 шара можно выбрать C_{11}^2 способами.

По правилу умножения получаем, что нужный нам состав шаров можно выбрать $N(A) = C_{10}^3 \cdot C_{11}^2$ способами. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^5} = \frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{11!}{2!9!} \cdot \frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 21} = \frac{2200}{6783} \approx 0{,}3243.$$

б) Проведем перебор случаев. Пусть B — событие, состоящее в том, что белых шаров *ровно* 4, а C — событие, означающее, что все 5 шаров — белые. Вероятности $P(B)$ и $P(C)$ вычисляются по той же схеме, что и $P(A)$ в пункте а):

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{C_{10}^4 \cdot C_{11}^1}{C_{21}^5} = \frac{10!}{4!6!} \cdot 11 \cdot \frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 11 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 21} = \frac{770}{6783} \approx 0{,}1135;$$

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{C_{10}^5}{C_{21}^5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!16!}{21!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{4}{17 \cdot 19} \approx 0{,}0124.$$

События B и C не могут наступить одновременно, т. е. они *несовместны*. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий (об этом мы уже говорили в курсе алгебры 9-го класса). Значит,

$$P(B + C) = P(B) + P(C) \approx 0{,}1135 + 0{,}0124 = 0{,}1259.$$

в) Интересующее нас событие произойдет в следующих случаях: из пяти вытащенных шаров — 3 белых и 2 черных, из пяти шаров — 4 белых и 1 черный, все 5 шаров — белые. Эти три случая соответствуют событиям A, B, C, разобранным в пунктах а) и б). Никакие два из событий A, B, C не могут наступить одновременно, т. е. эти события *попарно несовместны*. Поэтому

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 0{,}3243 + 0{,}1135 + 0{,}0124 = 0{,}4502.$$

Ответ: а) 0,3243; б) 0,1259; в) 0,4502.

З а м е ч а н и е. Задачи на отыскание вероятностей случайных событий «в два с половиной раза» сложнее задач по комбинаторике. Сначала мы используем комбинаторику при нахождении N — количества всех исходов опыта. Во второй раз комбинаторика нужна при нахождении $N(A)$, причем это уже, как правило, более сложная комбинаторика. Наконец, надо еще уметь вычислить значение дроби. Вот и получается «две с половиной комбинаторики».

2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимость событий

В примере 2 мы говорили о сумме несовместных событий. А как найти вероятность $P(A + B)$ для событий, которые могут наступать одновременно? Для ответа на такой вопрос необходима не только сама сумма $A + B$ событий A и B, но и их *произведение*.

Определение 1. **Произведением событий A и B** называют событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает и событие A, и событие B. Оно обозначается $A \cdot B$ или AB.

Пример 3. Дать описание произведения AB событий A и B, если:

а) A — цена товара больше 100 р., B — цена товара не больше 110 р.;

б) A — завтра пятница, B — завтра 13-е число;

в) A — координаты случайно выбранной точки на плоскости удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 1$; B — координаты случайно выбранной точки положительны;

г) A — случайно выбранное двузначное число четно; B — случайно выбранное двузначное число делится на 11.

Р е ш е н и е. а) Одновременное наступление событий A и B означает, что для цены S товара верно двойное неравенство

$$100 < S \leqslant 110.$$

б) Одновременное наступление событий A и B означает, что завтра — пятница, 13-е число.

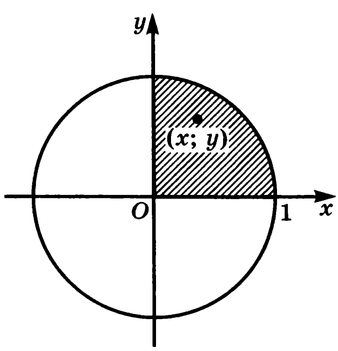


Рис. 242

в) Геометрически событие A означает, что точка выбрана в единичном круге $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, а событие B означает, что она выбрана в первой координатной четверти. Значит, одновременное наступление A и B означает, что точка выбрана в той четверти единичного круга, которая расположена выше оси абсцисс и правее оси ординат (рис. 242).

г) Четные двузначные числа составляют множество $\{10, 12, 14, \ldots, 94, 96, 98\}$. Двузначные числа, которые делятся на 11, составляют множество $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$. Одновременное наступление событий A и B означает, что выбранное число принадлежит и множеству $\{10, 12, 14, ..., 94, 96, 98\}$ и множеству $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$. Значит, событие AB состоит в том, что выбранное число принадлежит пересечению указанных множеств, т. е. множеству $\{22, 44, 66, 88\}$. Всего 4 случая.

Мы видим, что произведение AB событий A и B связано с пересечением множеств, соответствующих событиям A и B.

В курсе алгебры 9-го класса мы говорили о связи между понятиями и терминами теории вероятностей и теории множеств и составили соответствующую таблицу. Дополним ее новыми связями.

Теория вероятностей	**Теория множеств**
Испытание с N исходами	Множество из N элементов
Отдельный исход испытания	Элемент множества
Случайное событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое подмножество
Достоверное событие	Подмножество, совпадающее со всем множеством
Вероятность события	Доля элементов подмножества среди всех элементов множества
Сумма событий	*Объединение подмножеств*
Несовместные события	*Непересекающиеся подмножества*
Противоположное событие	*Дополнение подмножества до всего множества*
Произведение событий	*Пересечение подмножеств*

Теорема 1. **Сумма вероятностей двух событий равна сумме вероятности произведения этих событий и вероятности суммы этих событий.**

$$\boxed{P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B).}$$

Доказательство. Пусть A_1 — событие, состоящее в том, что наступает A, но не наступает B. Согласно определению 1 AB — событие, состоящее в том, что наступают A и B. Значит, события A_1 и AB несовместны, а их сумма равна A. Поэтому

$$P(A) = P(A_1) + P(AB).$$

Аналогично обозначим через B_1 событие, состоящее в том, что наступает B, но не наступает A. Тогда события B_1 и AB несовместны, а их сумма равна B. Значит,

$$P(B) = P(B_1) + P(AB).$$

Сложим эти равенства:

$$P(A) + P(B) = (P(A_1) + P(AB)) + (P(B_1) + P(AB)) =$$
$$= P(AB) + (P(A_1) + P(AB) + P(B_1)).$$

События A_1, AB, B_1 попарно несовместны, а их сумма равна $A + B$. Значит,

$$P(A_1) + P(AB) + P(B_1) = P(A + B),$$

и поэтому $P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B)$. ●

Для несовместных событий A и B доказанная теорема приводит к уже известным формулам. Действительно, несовместность событий A и B означает, что событие AB невозможно, т. е. $P(AB) = 0$. Тогда

$$P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B) = P(A + B).$$

В частности, так как событие $A + \bar{A}$ всегда достоверно, то

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = 1; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

При решении практических задач формулу $P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B)$ чаще всего записывают в виде

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

и применяют ее к *независимым* событиям A и B. Это понятие является одним из важнейших в теории вероятностей. Определение *независимости* двух событий напоминает правило умножения.

Определение 2. События A и B называют **независимыми**, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Не следует путать несовместность событий A и B и их независимость. Напомним, что несовместность событий A и B означает, что соответствующие множества исходов испытания не пересекаются. К сожалению, понятие независимости не имеет никакого наглядного смысла.

В практических задачах независимость событий, как правило, подразумевается в условиях задачи и обосновывается независимостью проводимых испытаний.

Теорема 2. **Вероятность суммы двух независимых событий равна разности суммы вероятностей этих событий и произведения вероятностей этих событий:**

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).}$$

Доказательство. По теореме 1

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Независимость A и B означает, что $P(AB) = P(A)P(B)$. Значит,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \quad ●$$

Отметим еще, что если независимы события A и B, то независимы события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Пример 4. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что мишень:

а) будет поражена дважды;

б) не будет поражена ни разу;

в) будет поражена хотя бы один раз;

г) будет поражена ровно один раз.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что первый стрелок попал в мишень, B — событие, состоящее в том, что второй стрелок попал в мишень. По условию $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}3$, а A и B независимы.

а) Мишень будет поражена дважды, если одновременно произошли оба события A и B, т. е. произошло событие AB. Поэтому $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27$.

б) Мишень вообще не будет поражена, если одновременно произошли события $\bar{A}$ и $\bar{B}$, т. е. произошло событие $\bar{A} \cdot \bar{B}$. Поэтому

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07.$$

в) Мишень будет поражена, если произошло или A, или B, т. е. произошло событие $A + B$. Поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}9 + 0{,}3 - 0{,}27 = 0{,}93.$$

Ту же вероятность можно получить и другим способом, действуя «через отрицание». Допустим, что событие $A + B$ *не произошло*, т. е. произошло событие $\overline{A + B}$. Это значит, что мишень вообще не поражена, а вероятность этого уже найдена в пункте б). Значит,

$$P(A + B) = 1 - P(\overline{A + B}) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93.$$

г) Мишень будет поражена ровно один раз, если произошло событие $A + B$, но не произошло событие AB. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A + B) - P(AB) = 0{,}93 - 0{,}27 = 0{,}66.$$

Ту же вероятность можно получить и другим способом. Событие, состоящее в том, что мишень будет поражена ровно один раз, равно сумме двух событий: $A \cdot \bar{B}$ (попал первый, но не попал второй стрелок) и $\bar{A} \cdot B$ (не попал первый, но попал второй стрелок). Значит, искомая вероятность равна

$$P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}66.$$

Ответ: а) 0,27; б) 0,07; в) 0,93; г) 0,66.

3. Независимые повторения испытаний. Теорема Бернулли и статистическая устойчивость

Несколько изменим предыдущий пример: вместо двух разных стрелков по мишени будет стрелять один и тот же стрелок.

Пример 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Было произведено 3 независимых друг от друга выстрела. Найти вероятность того, что мишень:

а) будет поражена трижды;

б) не будет поражена;

в) будет поражена хотя бы раз;

г) будет поражена ровно один раз.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена при первом выстреле. Тогда событие $\bar{A}$ означает промах. По условию $P(A) = 0,8$, значит, $P(\bar{A}) = 0,2$. Пусть, далее, $B(C)$ — событие, состоящее в том, что мишень поражена при втором (при третьем) выстреле. События A, B, C попарно независимы так же, как независимы события, скажем, AB и C, или $A \cdot \bar{B}$ и $\bar{C}$ и т. п.

а) Мишень будет поражена трижды, если одновременно произошли события A, B, и C, т. е. произошло событие ABC. Поэтому

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,8^3 = 0,512.$$

б) Мишень вообще не будет поражена, если одновременно произошли события $\bar{A}$, $\bar{B}$, и $\bar{C}$, т. е. произошло событие $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$. Поэтому

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0,2^3 = 0,008.$$

в) Мишень будет поражена, если произошло или A, или B, или C, т. е. произошло событие $A + B + C$. Однако для вероятности суммы *трех* событий, не являющихся несовместными, у нас не было никакой формулы. Тут удобнее действовать «через отрицание». Событие $\overline{A + B + C}$ заключается в том, что мишень не будет поражена. Это значит, что одновременно происходят события $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, т. е. $\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$. Имеем:

$$P(A + B + C) = 1 - P(\overline{A + B + C}) =$$
$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - 0,2^3 = 0,992.$$

г) Событие, состоящее в том, что мишень будет поражена ровно один раз, есть сумма трех событий: $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ (попал только первый выстрел), $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ (попал только второй выстрел) и $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ (попал только третий выстрел). Так как эти три события попарно несовместны, то получаем:

$$P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) +$$
$$+ P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 =$$
$$= 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2^2 = 0,096.$$

Решение, приведенное в пункте г) примера 5, в конкретном случае повторяет доказательство знаменитой теоремы Бернулли, которая относится к одной из наиболее распространенных вероятностных моделей: *независимым повторениям одного и того же испытания с двумя возможными исходами.* Отличительная особенность многих вероятностных задач состоит в том, что испытание, в результате которого может наступить интересующее нас событие, можно многократно повторять. В каждом из таких повторений нас интересует вопрос о том, произойдет или не произойдет это событие. А во всей серии повторений нам важно знать, *сколько именно раз* может произойти или не произойти это событие. Например, игральный кубик бросили десять раз подряд. Какова вероятность того, что «четверка» выпадет ровно 3 раза? Произведено 10 выстрелов; какова вероятность того, что будет ровно 8 попаданий в мишень? Или же какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты «орел» выпадет ровно 4 раза?

Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную схему.

Пусть вероятность случайного события A при проведении некоторого испытания равна $P(A)$. Будем рассматривать это испытание как испытание только с двумя возможными исходами: один исход состоит в том, что событие A произойдет, а другой исход состоит в том, что событие A не произойдет, т. е. произойдет событие $\overline{A}$. Для краткости назовем первый исход (наступление события A) «успехом», а второй исход (наступление события $\overline{A}$) «неудачей». Вероятность $P(A)$ «успеха» обозначим p, а вероятность $P(\overline{A})$ «неудачи» обозначим q. Значит,

$$q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

Теорема 3 (теорема Бернулли). **Пусть $P_n(k)$ — вероятность наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания. Тогда**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Эта теорема (мы приводим ее без доказательства) имеет огромное значение и для теории, и для практики.

Пример 6. В каждом из пунктов а) — г) определить значения n, k, p, q и выписать (без вычислений) выражение для искомой вероятности $P_n(k)$.

а) Чему равна вероятность появления ровно 7 «орлов» при 10 бросаниях монеты?

б) Каждый из 20 человек независимо называет один из дней недели. «Неудачными» днями считаются понедельник и пятница. Какова вероятность того, что «удач» будет ровно половина?

в) Бросание кубика «удачно», если выпадает 5 или 6 очков. Какова вероятность того, что ровно 5 бросаний из 25 будут «удачными»?

г) Испытание состоит в одновременном бросании трех различных монет. «Неудача»: «решек» больше, чем «орлов». Какова вероятность того, что будет ровно три «удачи» среди 7 бросаний?

Решение. а) $n = 10$, $k = 7$, $p = q = 0{,}5$,

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7} \cdot 0{,}5^{7} \cdot 0{,}5^{3} = C_{10}^{7} \cdot 0{,}5^{10}.$$

б) $n = 20$, $k = 10$. Вероятность «удачи» равна доле «удачных» дней среди всех дней недели, т. е. $p = \frac{5}{7}$, $q = \frac{2}{7}$. Значит,

$$P_{20}(10) = C_{20}^{10} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{10}\left(\frac{2}{7}\right)^{10} = C_{20}^{10} \cdot \frac{10^{10}}{7^{20}}.$$

в) $n = 25$, $k = 5$. «Удачные» результаты 5 и 6 составляют треть количества всех возможных результатов: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Значит, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, и потому

$$P_{25}(5) = C_{25}^{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{20} = C_{25}^{5} \cdot \frac{2^{20}}{3^{25}}.$$

г) $n = 7$, $k = 3$. «Удача» при одном бросании состоит в том, что «решек» выпало меньше, чем «орлов». Всего возможны 8 результатов: РРР, РРО, РОР, ОРР, РОО, ОРО, ООР, ООО (Р — «решка», О — «орел»). Ровно в половине из них «решек» меньше «орлов»: РОО, ОРО, ООР, ООО. Значит,

$$p = q = 0{,}5;\ P_{7}(3) = C_{7}^{3} \cdot 0{,}5^{3} \cdot 0{,}5^{4} = C_{7}^{3} \cdot 0{,}5^{7}.$$

Теорема Бернулли позволяет установить связь между статистическим подходом к определению вероятности и классическим определением вероятности случайного события. Чтобы описать эту связь, вернемся к терминам § 50 о статистической обработке информации. Рассмотрим последовательность из n независимых повторений одного и того же испытания с двумя исходами — «удачей» и «неудачей». Результаты этих испытаний составляют ряд данных, состоящий из некоторой последовательности двух вариант: «удачи» и «неудачи». Проще говоря, имеется последовательность длины n, составленная из двух букв У («удача») и Н («неудача»). Например, У, У, Н, Н, У, Н, Н, Н, ..., У или Н, У, У, Н, У, У, Н, Н, У, ..., Н и т. п. Подсчитаем кратность и частоту варианты У, т. е. найдем дробь $\frac{k}{n}$, где k — количество «удач», встретившихся среди всех n повторений. Оказывается, что при неограниченном возрастании n частота $\frac{k}{n}$ появления «успехов» будет практически неотличимой от вероятности p «успеха» в одном испытании. Этот довольно сложный математический факт выводится именно из теоремы Бернулли.

Теорема 4. **При большом числе независимых повторений одного и того же испытания частота появления случайного события A со все большей точностью приближенно равна вероятности события A: $\frac{k}{n} \approx P(A)$.**

Например, при $n \geqslant 2000$ с вероятностью, большей чем 99%, можно утверждать, что абсолютная погрешность $\left|\frac{k}{n} - P(A)\right|$ приближенного равенства $\frac{k}{n} \approx P(A)$ будет меньше 0,03. Поэтому при социологических опросах достаточно бывает опросить около 2000 случайно выбранных людей (респондентов). Если, допустим, 520 из них положительно ответили на заданный вопрос, то $\frac{k}{n} = \frac{520}{2000} = 0{,}26$ и практически достоверно, что для любого большего числа опрошенных такая частота будет находиться в пределах от 0,23 до 0,29. Это явление называют явлением *статистической устойчивости*.

Итак, теорема Бернулли и следствия из нее позволяют (приближенно) находить вероятность случайного события в тех случаях, когда ее явное вычисление невозможно.

4. Геометрическая вероятность

Мы познакомились с классическим определением вероятности. Оно применимо к испытаниям с конечным числом равновозможных между собой исходов. Однако весьма часто встречаются испытания и с *бесконечным* числом исходов. Тут классическая вероятностная схема не применима.

Пример 7. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 5| \leqslant 10$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 1| \leqslant 1$?

Р е ш е н и е. Сначала решим каждое из неравенств. Вспомним геометрический смысл модуля разности $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b на числовой прямой. Поэтому неравенство $|x - 1| \leqslant 1$ означает, что расстояние между точками x и 1 не больше 1. Значит, решение неравенства — отрезок [0; 2] (верхняя штриховка на рис. 243), его длина равна 2.

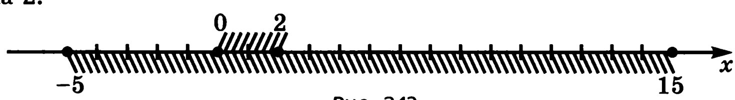


Рис. 243

В свою очередь неравенство $|x - 5| \leqslant 10$ означает, что расстояние между точками x и 5 не больше 10. Значит, решение неравенства — отрезок [−5; 15] (нижняя штриховка на рис. 243), его длина равна 20.

Мы видим, что из всех решений неравенства $|x - 5| \leqslant 10$ только одну десятую часть составляют решения неравенства $|x - 1| \leqslant 1$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{10}$. ◁■

Сформулируем общее правило для нахождения геометрической вероятности: *если длину $l(A)$ промежутка A разделить на длину $l(X)$ промежутка X, который целиком содержит промежуток A, то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из промежутка X, окажется в промежутке A: $P = \frac{l(A)}{l(X)}$.*

Аналогично поступают и с множествами на числовой плоскости, и с пространственными телами. Но в этом случае длину следует заменить или на площади фигур, или соответственно на объемы пространственных тел.

Пример 8. В прямоугольнике $ABCD$, у которого $BC = 2AB$ (рис. 244) случайно выбирают точку. Найти вероятность того, что она расположена ближе к прямой AB, чем к прямой AD.

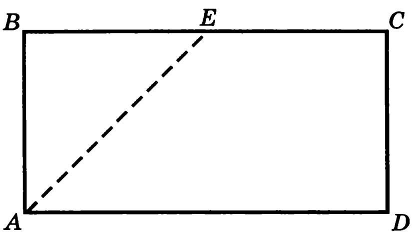


Рис. 244

Решение. Пусть AE — биссектриса угла A и $E \in BC$ (рис. 244). Тогда $AB = BE$, точки отрезка AE равноудалены от прямых AB и AD, а точки треугольника ABE (за исключением точек стороны AE) расположены к AB ближе, чем к AD. Это и есть интересующее нас множество. От включения (исключения) стороны площадь треугольника не меняется. Площадь ΔABE составляет четверть площади всего прямоугольника. В самом деле, $S_{ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot BE = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}AB \cdot BC = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Значит, искомая вероятность равна 0,25. ◁■

ГЛАВА 10 Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств

Изучая курс алгебры, вы постоянно решали уравнения и неравенства с одной переменной, системы уравнений с двумя переменными, системы неравенств с одной переменной. В этой главе, завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа, мы снова обращаемся к уравнениям и неравенствам, чтобы рассмотреть их с самых общих позиций. Это будет, с одной стороны, своеобразное подведение итогов и, с другой стороны, некоторое расширение и углубление ваших знаний.

§ 55. Равносильность уравнений

В этом параграфе речь пойдет о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие — нет; когда и как надо делать проверку найденных корней. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических уравнений. Теперь рассмотрим эти вопросы с самых общих позиций.

Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и −2. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} = -3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. Если каждый корень уравнения

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \qquad (2)$$

то уравнение (2) называют **следствием уравнения** (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x - 2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x - 2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x - 2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение:

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Схему решения любого уравнения можно описать так: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем уравнение (1); уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), и т. д.:

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to \ldots .$$

В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни. В этот момент и возникает главный вопрос: совпадает ли множество найденных корней последнего уравнения с множеством корней исходного уравнения (1)? Если все преобразования были равносильными, т. е. если были равносильны уравнения (1) и (2), (2) и (3), (3) и (4) и т. д., то ответ на поставленный вопрос положителен: да, совпадает. Это значит, что, решив последнее уравнение цепочки, мы тем самым решим и первое (исходное) уравнение. Если же некоторые преобразования были равносильными, а в некоторых мы не уверены, но точно знаем, что переходили с их помощью к уравнениям-следствиям, то однозначного ответа на поставленный вопрос мы не получим.

Чтобы ответ на вопрос был более определенным, нужно все найденные корни последнего уравнения цепочки *проверить*, подставив их поочередно в исходное уравнение (1). Если проверка показывает, что найденный корень последнего уравнения цепочки не удовлетворяет исходному уравнению, его называют *посторонним корнем*; естественно, что посторонние корни в ответ не включают.

Вы, конечно, понимаете, что термин «более простое уравнение», вообще говоря, не поддается точному описанию. Обычно одно уравнение считают более простым, чем другое, по чисто внешним признакам. Например, решая уравнение $2^{\sqrt{2x+7}} = 2^{x-3}$, получаем сначала $\sqrt{2x+7} = x - 3$; это иррациональное уравнение проще заданного «показательно-иррационального» уравнения. Далее возведя обе части иррационального уравнения в квадрат, получим: $2x + 7 = (x - 3)^2$; это рациональное уравнение проще, чем предыдущее иррациональное уравнение.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа.

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

1. Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?

2. Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?

3. Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?

4. В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Ответу на каждый из вопросов отведен отдельный пункт данного параграфа.

1. Теоремы о равносильности уравнений

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести *теоремах о равносильности* (все они в той или иной мере вам известны). Первые три теоремы — «спокойные», они гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

Теорема 1. **Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.**

Теорема 2. **Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.**

Теорема 3. **Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

Следующие три теоремы — «беспокойные», они работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений. Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

Определение 3. **Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ)** называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4. **Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:**

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0,

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 5. **Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n = g(x)^n$.**

Теорема 6. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие

В этом пункте мы ответим на второй вопрос: какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие?

Частично ответ на этот вопрос связан с тремя последними теоремами. Можно сказать так: если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировке теоремы, то получится уравнение-следствие. Приведем примеры.

1) Уравнение $x - 1 = 3$ имеет один корень: $x = 4$. Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим уравнение $(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$, имеющее два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы умножили обе части уравнения на одно и то же выражение, нарушив при этом условия теоремы 4. В этой теореме содержится требование: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, нигде не должно обращаться в 0. Мы же умножили обе части уравнения на выражение $x - 2$, которое обращается в 0 при $x = 2$; именно это значение оказалось посторонним корнем.

2) Возьмем то же самое уравнение $x - 1 = 3$ и возведем обе его части в квадрат. Получим уравнение $(x - 1)^2 = 9$, имеющее два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы возвели обе части уравнения в одну и ту же четную степень, нарушив при этом условие теоремы 5. В этой теореме содержится требование: обе части уравнения должны быть неотрицательны. Относительно выражения $x - 1$ это утверждать мы не можем.

3) Рассмотрим уравнение $\ln(2x - 4) = \ln(3x - 5)$. Потенцируя, получим уравнение $2x - 4 = 3x - 5$ с единственным корнем: $x = 1$. Но этот корень является посторонним для заданного логарифмического уравнения, поскольку оба выражения под знаками логарифмов при $x = 1$ принимают отрицательные значения. Причина появления постороннего корня состоит в том, что мы, потенцируя (т. е. «освобождаясь» от знаков логарифмов), нарушили условия теоремы 6. В этой теореме содержится требование: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными; о выражениях $2x - 4$ и $3x - 5$ этого утверждать мы не можем, так как они при одних значениях x положительны, при других — отрицательны.

В последнем примере переход от логарифмического уравнения к уравнению $2x - 4 = 3x - 5$ привел к *расширению области определения уравнения*. Область определения логарифмического уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 3x - 5 > 0, \end{cases}$$

решив которую находим: $x > 2$. Область же определения уравнения $2x - 4 = 3x - 5$ есть множество всех действительных чисел. По сравнению с логарифмическим уравнением она расширилась:

добавился луч $(-\infty; 2]$. Именно в эту добавленную часть и «проник» посторонний корень $x = 1$.

Перечислим возможные *причины расширения области определения уравнения*:

1) освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину;

2) освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени;

3) освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведем итоги. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, *обязательна проверка всех найденных корней, если*:

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$.

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме $(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to \ldots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Последовательно имеем:

$$\sqrt{5x-6} = 5 - \sqrt{2x+5};$$

$$\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(5-\sqrt{2x+5}\right)^2;$$

$$5x - 6 = 25 - 10\sqrt{2x+5} + 2x + 5;$$

$$10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x;$$

$$\left(10\sqrt{2x+5}\right)^2 = (36 - 3x)^2;$$

$$100(2x + 5) = 1296 - 216x + 9x^2;$$

$$9x^2 - 416x + 796 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{398}{9} = 44\frac{2}{9}.$$

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными. Замечаем, что в процессе решения уравнения дважды применялось неравносильное преобразование — возведение в квадрат; кроме того, расширилась область определения уравнения (были квадратные корни — были ограничения на переменную, не стало квадратных корней — не стало ограничений). Значит, решенное на последнем шаге первого этапа квадратное уравнение является уравнением-следствием для заданного уравнения. Проверка обязательна.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочередно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

Если $x = 2$, то получаем: $\sqrt{2 \cdot 2 + 5} + \sqrt{5 \cdot 2 - 6} = 5$, т. е. $3 + 2 = 5$ — верное равенство.

Если $x = 44\frac{2}{9}$, то получаем: $\sqrt{2 \cdot 44\frac{2}{9} + 5} + \sqrt{5 \cdot 44\frac{2}{9} - 6} = 5.$

Это неверное равенство, поскольку уже первое подкоренное выражение явно больше, чем 25, и потому корень из него больше, чем 5, т. е. уже больше правой части равенства; тем более, что к этому квадратному корню прибавляется еще одно положительное число. Таким образом, $x = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

3. О проверке корней

В этом пункте мы ответим на третий вопрос: как сделать проверку корней, если их подстановка в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями? Видимо, в таких случаях надо искать обходные пути проверки.

Вернемся к примеру 1. Подстановка значения $x_1 = 2$ в заданное уравнение трудностей не представляла. Подстановку же второго значения $x_2 = 44\frac{2}{9}$ мы фактически заменили прикидкой. Мы прикинули, что $x_2 \approx 44$, значит, $\sqrt{2x_2 + 5} > 5$, и сразу стало ясно, что $x_2 = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень. Такая прикидка — один из обходных путей проверки.

Еще раз вернемся к примеру 1. Значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ можно было проверить не по исходному уравнению, а по полученному в процессе преобразований уравнению-следствию: $10\sqrt{2x + 5} = 36 - 3x$. По смыслу этого уравнения должно выполняться неравенство $36 - 3x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 12$.

Поскольку значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ этому условию не удовлетворяет, то x_2 — посторонний корень для уравнения $10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x$ и тем более для исходного уравнения.

Как правило, самый легкий обходной путь проверки — по области определения (ОДЗ) заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\ln(x + 4) + \ln(2x + 3) = \ln(1 - 2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом: «Сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x + 4) + \ln(2x + 3)$ выражением $\ln(x + 4)(2x + 3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\ln(x + 4)(2x + 3) = \ln(1 - 2x).$$

Потенцируя, получаем:

$$(x + 4)(2x + 3) = (1 - 2x);$$

$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;$$

$$2x^2 + 13x + 11 = 0;$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = -5{,}5.$$

Второй этап. В процессе решения произошло расширение области определения уравнения, значит, проверка обязательна.

Третий этап. Поскольку, кроме расширения области определения уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по области определения исходного уравнения. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству; это посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание 1. Каждый раз выделять при решении уравнения три этапа — технический, анализ, проверку — необязательно. Но все это нужно «держать в голове» и уж во всяком случае понимать следующее: если анализ показал, что проверка обязательна, а вы ее не сделали, то уравнение не может считаться решенным верно; тем более оно не может считаться решенным верно, если вы не сделали сам анализ.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Решение. Потенцируя, получаем:

$$x^2 - 1 = 5 - x;$$
$$x^2 + x - 6 = 0;$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3.$$

Для проверки корней выпишем условия, задающие ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4>0, \\ x+4 \neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ удовлетворяет всем условиям этой системы, а значение $x = -3$ не удовлетворяет второму условию; следовательно, $x = -3$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

Замечание 2. Не переоценивайте способ проверки по ОДЗ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения ОДЗ, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит; лучше, если это возможно, делать проверку подстановкой. Так, в примере 1 ОДЗ: $x \geqslant \frac{6}{5}$. В эту область попадают оба найденных значения: $x_1 = 2$, $x_2 = 44\frac{2}{9}$. Но, как мы видели, второй корень — посторонний. Так что ОДЗ здесь не помогла.

4. О потере корней

В этом пункте мы ответим на четвертый вопрос: в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений*:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ к уравнению $h(x)(f(x) - g(x)) = 0$ (а не к уравнению $f(x) = g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение $\lg x^2 = 4$ и решим его двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись определением логарифма, находим: $x^2 = 10^4$; $x_1 = 100$, $x_2 = -100$.

Второй способ. Имеем: $2 \lg x = 4$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

Обратите внимание: при решении вторым способом произошла потеря корня — «потерялся» корень $x = -100$. Причина в том, что вместо правильной формулы $\lg x^2 = 2 \lg |x|$ мы воспользовались неправильной формулой $\lg x^2 = 2 \lg x$, сужающей область определения выражения: область определения выражения $\lg x^2$ задается условием $x \neq 0$ (т. е. $x < 0$ или $x > 0$), тогда как область определения выражения $2 \lg x$ задается условием $x > 0$. Область определения сузилась, из нее «выпал» открытый луч $(-\infty; 0)$, где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей формулы были одинаковыми.

Есть еще одна причина, по которой может произойти потеря корней, ее мы упомянем в начале § 56.

§ 56. Общие методы решения уравнений

В этом параграфе мы поговорим об общих идеях, на которых основано решение уравнений, о наиболее общих методах, используемых при решении уравнений любых видов.

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Этот метод мы применяли:

при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;

при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;

при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$.

Этот метод можно применять только в том случае, когда $y = h(x)$ — монотонная функция, которая каждое свое значение принимает по одному разу. Например, $y = x^7$ — возрастающая функция, поэтому от уравнения $(2x + 2)^7 = (5x - 9)^7$ можно перейти к уравнению $2x + 2 = 5x - 9$, откуда находим: $x = \frac{11}{3}$. Это — равносильное преобразование уравнения.

Если $y = h(x)$ — немонотонная функция, то указанный метод применять нельзя, поскольку *возможна потеря корней*. Нельзя, например, заменить уравнение $(2x + 2)^4 = (5x - 9)^4$ уравнением $2x + 2 = 5x - 9$, корнем которого, как мы видели выше, является $\frac{11}{3}$. При этом переходе «потерялся» корень $x = 1$; проверьте: значение $x = 1$ удовлетворяет уравнению $(2x + 2)^4 = (5x - 9)^4$. Причина в том, что $y = x^4$ — немонотонная функция. По той же причине нельзя переходить от уравнения $\sin 17x = \sin 7x$ к уравнению $17x = 7x$ с единственным корнем $x = 0$. На самом деле указанное тригонометрическое уравнение имеет бесконечное множество корней (см. пример 1б в § 22):

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}, \quad x = \frac{\pi n}{5}; \; n \in \mathbf{Z}.$$

2. Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в следующем: уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$f(x) = 0; \quad g(x) = 0; \quad h(x) = 0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2} - 3\right)\left(2^{x^2 + 6x + 5} - 1\right)\ln (x - 8) = 0.$$

Решение. Задача сводится к решению совокупности трех уравнений:

$$\sqrt{x + 2} = 3; \quad 2^{x^2 + 6x + 5} = 1; \quad \ln (x - 8) = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x + 2 = 9$; $x_1 = 7$.

Из второго уравнения получаем: $x^2 + 6x + 5 = 0$; $x_2 = -1$, $x_3 = -5$.

Из третьего уравнения находим: $x - 8 = 1$; $x_4 = 9$.

Сделаем проверку. ОДЗ исходного уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x - 8 > 0, \end{cases}$$

откуда получаем: $x > 8$.

Из найденных четырех корней — x_1, x_2, x_3, x_4 — неравенству $x > 8$ удовлетворяет лишь $x_4 = 9$. Значит, $x = 9$ — единственный корень уравнения, а остальные — являются посторонними.

Ответ: 9.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Решение. Представив слагаемое $7x$ в виде $x + 6x$, получим последовательно:

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0;$$
$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$(x - 1)(x(x + 1) - 6) = 0;$$
$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0.$$

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x - 1 = 0; \quad x^2 + x - 6 = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x_1 = 1$; из второго: $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Поскольку все преобразования были равносильными, найденные три значения являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 1, 2, −3.

3. Метод введения новой переменной

Этим методом мы с вами часто пользовались при решении уравнений. Суть метода проста: если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$g(x) = u_1; \quad g(x) = u_2; \ \ldots; \quad g(x) = u_n,$$

где u_1, u_2, ..., u_n — корни уравнения $p(u) = 0$.

Умение удачно ввести новую переменную приходит с опытом. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается», а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований. Примите совет: решая уравнение, не торопитесь начинать преобразования, сначала подумайте, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную. И еще: если вы ввели новую переменную, то решите полученное уравнение относительно новой переменной до конца, т. е. вплоть до проверки его корней (если это необходимо), и только потом возвращайтесь к исходной переменной.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Решение. Введя новую переменную $u = x^2 - x$, получим существенно более простое иррациональное уравнение:

$$\sqrt{u+2} + \sqrt{u+7} = \sqrt{2u+21}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{u+2} + \sqrt{u+7}\right)^2 = \left(\sqrt{2u+21}\right)^2;$$

$$u + 2 + 2\sqrt{u+2}\sqrt{u+7} + u + 7 = 2u + 21;$$

$$\sqrt{(u+2)(u+7)} = 6;$$

$$u^2 + 9u + 14 = 36;$$

$$u^2 + 9u - 22 = 0;$$

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -11.$$

Проверка найденных значений (здесь она обязательна) их подстановкой в уравнение $\sqrt{u+2} + \sqrt{u+7} = \sqrt{2u+21}$ показывает, что $u_1 = 2$ — корень уравнения, а $u_2 = -11$ — посторонний корень.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем уравнение $x^2 - x = 2$, т. е. квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, решив которое находим два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Ответ: 2, –1.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{3^{x+1}+1}{7} = \dfrac{4}{3^{x-2}}$.

Решение. Так как $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$, а $3^{x-2} = 3^x : 3^2$, то заданное уравнение можно переписать в виде $\dfrac{3 \cdot 3^x + 1}{7} = \dfrac{4 \cdot 9}{3^x}$. Введем новую переменную $u = 3^x$; получим:

$$\frac{3u+1}{7} = \frac{36}{u};$$

$$3u^2 + u - 252 = 0;$$

$$u_1 = 9, \quad u_2 = -\frac{28}{3}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$3^x = 9; \quad 3^x = -\frac{28}{3}.$$

Из первого уравнения находим: $x = 2$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 2.

Пример 5. Решить уравнение $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Решение. Есть смысл ввести новую переменную $u = \sin x$, понимая, что от $\cos 2x$ «добраться» до $\sin x$ сравнительно несложно:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2u^2.$$

Подставив в заданное тригонометрическое уравнение u вместо $\sin x$ и $1 - 2u^2$ вместо $\cos 2x$, получим рациональное уравнение:

$$(1 - 2u^2) - 5u - 3 = 0; \; 2u^2 + 5u + 2 = 0; \; u_1 = -\frac{1}{2}, \; u_2 = -2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\sin x = -\frac{1}{2}; \quad \sin x = -2.$$

Из первого уравнения находим: $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение $\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$.

Решение. Здесь новая переменная как бы «ощущается»: $u = \lg x$. Подготовимся к ее введению, для чего используем свойства логарифмов:

$$\lg^2 x^3 = (\lg x^3)^2 = (3 \lg x)^2 = 9 \lg^2 x;$$
$$\log_{0,1} 10x = \log_{(0,1)^{-1}} (10x)^{-1} = -\log_{10} 10x = -(\lg 10 + \lg x) =$$
$$= -(1 + \lg x).$$

Перепишем заданное уравнение в виде $9 \lg^2 x - (1 + \lg x) - 7 = 0$ и введем новую переменную $u = \lg x$; получим:

$$9u^2 - (1 + u) - 7 = 0;$$
$$9u^2 - u - 8 = 0;$$
$$u_1 = 1, \; u_2 = -\frac{8}{9}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\lg x = 1; \quad \lg x = -\frac{8}{9}.$$

Из первого уравнения находим: $x_1 = 10$, из второго — $x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$.

Ответ: 10; $10^{-\frac{8}{9}}$.

Мы рассмотрели в этом пункте различные уравнения: рациональное, показательное, тригонометрическое и логарифмическое. Как видите, тип уравнения не так уж важен, идея решения по сути одна и та же.

В заключение рассмотрим более сложный пример, где новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований.

Пример 7. Решить уравнение $x^2 + \dfrac{81x^2}{(9+x)^2} = 40$.

Решение. Заметив, что левая часть уравнения имеет структуру $A^2 + B^2$, где $A = x$, $B = \dfrac{9x}{9+x}$, выделим в левой части полный квадрат, прибавив и отняв $2AB$, т. е. $2x \cdot \dfrac{9x}{9+x}$. Получим:

$$\left(x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} - 2x \cdot \frac{9x}{9+x}\right) + 2x \cdot \frac{9x}{9+x} = 40;$$

$$\left(x - \frac{9x}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40;$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} - 40 = 0.$$

Новая переменная «проявилась»: $u = \dfrac{x^2}{9+x}$. Относительно этой новой переменной мы получили квадратное уравнение $u^2 + 18u - 40 = 0$. Находим его корни: $u_1 = 2$, $u_2 = -20$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\frac{x^2}{9+x} = 2; \quad \frac{x^2}{9+x} = -20.$$

Из первого уравнения находим: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}$.

4. Функционально-графический метод

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а затем найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Графическим методом вы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций (потому-то мы говорим не о графическом, а о *функционально-графическом методе* решения уравнений). Если, например, одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая — убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень (который иногда можно угадать). Этим приемом мы уже пользовались при решении иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.

Упомянем еще одну довольно красивую разновидность функционально-графического метода: *если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке X равносильно системе уравнений*

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

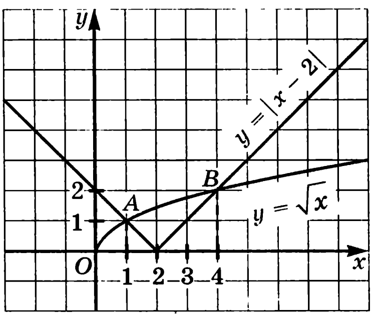


Рис. 245

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x} = |x - 2|.$$

Решение. Графики функций

$$y = \sqrt{x} \text{ и } y = |x - 2|$$

изображены на рисунке 245. Они пересекаются в точках $A(1;\ 1)$ и $B(4;\ 2)$. Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^5 + 5x - 42 = 0.$$

Решение. Замечаем, что $x = 2$ — корень уравнения, поскольку $2^5 + 5 \cdot 2 - 42 = 0$. Докажем, что это единственный корень.

Преобразуем уравнение к виду $x^5 = 42 - 5x$. Замечаем, что функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 10. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Замечаем, что $x = 2$ — корень уравнения, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$ — верное равенство. Докажем, что это единственный корень.

Разделив обе части уравнения на 4^x, преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Замечаем, что функция $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ убывает, а функция $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ возрастает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 11. Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Ее графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины параболы найдем из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2;$$
$$2x - 2 = 0;$$
$$x = 1.$$

Если $x = 1$, то $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$.

Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получили: $y_{\text{наим}} = 1$. В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{\text{наиб}} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем: $x = 1$. Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, то оно является единственным решением системы и, следовательно, единственным корнем заданного уравнения.

Ответ: 1.

§ 57. Решение неравенств с одной переменной

В этом параграфе речь пойдет о принципиальных вопросах, связанных с решением неравенств с одной переменной: что такое равносильные неравенства, какие преобразования неравенств являются равносильными, а какие — нет. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических неравенств. Мы снова возвращаемся к этим вопросам, потому что, повторимся, завершая изучение курса алгебры, целесообразно переосмыслить общие идеи и методы.

1. Равносильность неравенств

Напомним, что *решением неравенства* $f(x) > g(x)$ называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство. Иногда используют термин *частное решение*. Множество всех частных решений неравенства называют *общим решением*, но чаще употребляют термин *решение*. Таким образом, термин *решение* используют в трех смыслах: как общее решение, как частное решение и как процесс, но обычно по смыслу бывает ясно, о чем идет речь.

Определение 1. Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют **равносильными**, если их решения (т. е. множества частных решений) совпадают.

Вы, конечно, понимаете, что использование в определении знака $>$ непринципиально. Можно и в этом определении, и во всех утверждениях, имеющихся в данном параграфе, использовать любой другой знак неравенства как строгого, так и нестрогого.

Определение 2. Если решение неравенства

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

содержится в решении неравенства

$$p(x) > h(x), \qquad (2)$$

то неравенство (2) называют **следствием неравенства (1).**

Например, неравенство $x^2 > 9$ является следствием неравенства $2x > 6$. В самом деле, преобразовав первое неравенство к виду $x^2 - 9 > 0$ и далее к виду $(x - 3)(x + 3) > 0$ и применив метод интервалов (рис. 246), получаем, что решением неравенства служит объединение двух открытых лучей: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Решение второго неравенства $2x > 6$ имеет вид $x > 3$, т. е. представляет собой открытый луч $(3; +\infty)$. Решение второго неравенства является частью решения первого, а потому первое неравенство — следствие второго.

Интересно, что ситуация изменится радикальным образом, если в обоих неравенствах изменить знак неравенства: неравенство $2x < 6$ будет следствием неравенства $x^2 < 9$. В самом деле, решением первого неравенства служит открытый луч $(-\infty; 3)$. Преобразовав второе неравенство к виду $x^2 - 9 < 0$ и далее к виду $(x - 3)(x + 3) < 0$ и применив метод интервалов (рис. 246), получаем, что

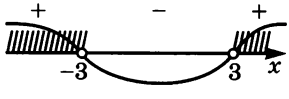


Рис. 246

решением неравенства служит интервал $(-3; 3)$. Решение второго неравенства является частью решения первого, а потому первое неравенство — следствие второго.

При решении уравнений мы не очень опасались того, что в результате некоторых преобразований можем получить уравнение-следствие, поскольку посторонние корни всегда можно отсеять с помощью проверки. В неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество чисел, доводить дело до проверки нецелесообразно. Поэтому при решении неравенств стараются выполнять только равносильные преобразования.

Решение неравенств, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести теоремах о равносильности, в определенном смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений (см. § 55).

Теорема 1. **Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.**

Теорема 2. **Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.**

Теорема 3. **Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно:**

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теорема 4. **а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.**

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 5. **Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень n получится неравенство того же смысла $f(x)^n > g(x)^n$, равносильное данному.**

***Теорема 6.* Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно:**

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теоремами 1 и 4 вы активно пользовались в курсе алгебры 9-го класса, когда решали рациональные неравенства и их системы. Теорему 3 мы использовали выше, в § 40, для решения показательных неравенств. Теорему 6 мы использовали в § 45 для решения логарифмических неравенств. Теорема 5 будет использоваться далее в этом параграфе.

2. Системы и совокупности неравенств

Определение 3. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств,** если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением *всех* заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств.** Множество всех частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто **решение системы неравенств**).

Решить систему неравенств — значит найти все ее частные решения. Решение системы неравенств представляет собой пересечение решений неравенств, образующих систему.

Определение 4. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств,** если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением *хотя бы одного* из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств.** Множество всех частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств.**

Решение совокупности неравенств представляет собой объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой, а неравенства, образующие совокупность, — квадратной скобкой. Впрочем, для неравенств, образующих совокупность, вполне допустима запись в строчку через точку с запятой. Например, решение неравенства $\sin^2 x > \frac{1}{4}$ сводится к решению совокупности неравенств: $\sin x > \frac{1}{2}$; $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Пример 1. Решить систему и совокупность неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11; \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11. \end{array}\right.$

Решение. а) Решая первое неравенство системы, находим: $2x > 4$; $x > 2$. Решая второе неравенство системы, находим: $3x \geqslant 13$; $x \geqslant \frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю (рис. 247). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы, т. е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. В рассматриваемом примере получаем луч $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$.

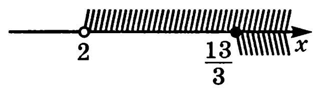


Рис. 247

б) Решением совокупности неравенств будет объединение решений неравенств совокупности. В рассматриваемом примере получаем (см. рис. 247) открытый луч $(2; +\infty)$ — промежуток, на котором имеется хотя бы одна штриховка.

Ответ: а) $x \geqslant \frac{13}{3}$; б) $x > 2$.

Если в системе из нескольких неравенств одно является следствием другого (или других), то неравенство-следствие можно отбросить. Мы этим уже фактически пользовались. Рассмотрим еще раз пример решения логарифмического неравенства из § 45.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} (16 + 4x - x^2) \leqslant -4$.

Решение. Представим число -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$: $-4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Это позволит переписать заданное неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{2}} (16 + 4x - x^2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число меньше 1, составляем, пользуясь теоремой 6, систему неравенств, равносильную заданному логарифмическому неравенству:

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 > 16. \end{cases}$$

Если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое (если $A \geqslant 16$, то тем более $A > 0$). Значит, первое неравенство — следствие второго и его можно отбросить. Решая второе неравенство, находим:

$$x^2 - 4x \leqslant 0;$$
$$x(x - 4) \leqslant 0;$$
$$0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Снова вернемся к § 45. Мы говорили, что при решении логарифмических неравенств переходят от неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{3}$$

при $a > 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \tag{4}$$

а при $0 < a < 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \tag{5}$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют ОДЗ переменной для неравенства (3), а знак последнего неравенства каждой из систем либо совпадает со знаком неравенства (3) — в случае, когда $a > 1$, либо противоположен знаку неравенства (3) — в случае, когда $0 < a < 1$.

А теперь обратим внимание на одно обстоятельство, которое мы в общем виде в § 45 не обсуждали. В каждой из составленных систем есть по одному «лишнему» неравенству. В системе (4) имеем $f(x) > g(x)$, $g(x) > 0$; отсюда, по свойству транзитивности неравенств, можно сделать вывод, что $f(x) > 0$. Это значит, что первое неравенство системы (4) является следствием второго и третьего неравенств, а неравенство-следствие можно отбросить. Таким образом, систему (4) можно заменить более простой системой неравенств:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогично можно установить, что систему (5) можно заменить более простой системой неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

В примере 2 нам встретился типичный случай, когда решение заданного неравенства сводится к решению системы неравенств. Бывают и более сложные неравенства, сводящиеся к модели «совокупность систем неравенств». Это значит, что надо найти решения всех составленных систем неравенств, а затем эти решения объединить.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(2x - 3) > \log_{x-2}(24 - 6x).$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $x - 2 > 1$; 2) $0 < x - 2 < 1$.

В первом случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x - 3 > 0$ и $24 - 6x > 0$, мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив, согласно теореме 6, знак исходного неравенства: $2x - 3 > 24 - 6x$.

Во втором случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x - 3 > 0$ и $24 - 6x > 0$, мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, изменив, согласно теореме 6, знак исходного неравенства: $2x - 3 < 24 - 6x$.

Это значит, что заданное логарифмическое неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 > 24 - 6x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 < 24 - 6x. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств находим: $\frac{27}{8} < x < 4$; из второй системы получаем: $2 < x < 3$.

Ответ: $2 < x < 3$; $\frac{27}{8} < x < 4$.

З а м е ч а н и е. В первой из составленных при решении примера 3 систем можно отбросить второе неравенство, а во второй — третье. Подумайте, почему это так.

3. Иррациональные неравенства

Обсудим решение неравенства вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x). \qquad (6)$$

Во-первых, запишем условие, определяющее ОДЗ: $f(x) \geqslant 0$.

Во-вторых, заметим, что при $g(x) \leqslant 0$ неравенство (6) не имеет решений, значит, можно сразу потребовать выполнения условия $g(x) > 0$.

В-третьих, заметим, что при указанных условиях ($f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$) обе части неравенства (6) неотрицательны, значит, если по теореме 5 возвести их в квадрат, получим неравенство $f(x) < (g(x))^2$, равносильное данному.

Таким образом, иррациональное неравенство (6) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Обсудим решение неравенства вида

$$\sqrt{f(x)} > g(x). \qquad (7)$$

Во-первых, запишем условие, определяющее ОДЗ: $f(x) \geqslant 0$.

Во-вторых, заметим, что при $g(x) < 0$ справедливость неравенства (7) не вызывает сомнений (поскольку $\sqrt{f(x)} \geqslant 0$). Это значит, что решения системы неравенств $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) < 0$ являются одновременно и решениями неравенства (7).

В-третьих, заметим, что если $g(x) \geqslant 0$, то обе части неравенства (7) неотрицательны (мы, естественно, учитываем, что $f(x) \geqslant 0$). Значит, если по теореме 5 возвести их в квадрат, получим неравенство $f(x) > (g(x))^2$, равносильное данному.

Таким образом, иррациональное неравенство (7) равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Первое неравенство второй системы можно опустить (подумайте, почему).

Пример 4. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$; б) $\sqrt{x^2 - x - 12} > x$.

Решение. а) Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}$$

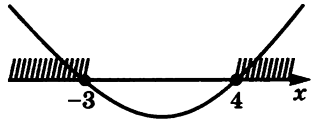


Рис. 248

Для решения квадратного неравенства $x^2 - x - 12 \geqslant 0$ найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 12$; получим: $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. Геометрическая иллюстрация, представленная на рисунке 248, помогает найти решение неравенства:

$$x \leqslant -3; \; x \geqslant 4.$$

Второе неравенство системы уже решено: $x > 0$. Из третьего неравенства находим: $x > -12$.

Геометрическая иллюстрация, представленная на рисунке 249, помогает найти решение системы неравенств: $x \geqslant 4$.

б) Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 > x^2. \end{cases}$$

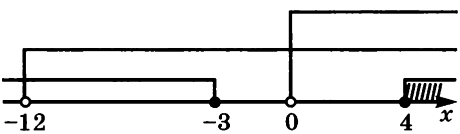


Рис. 249

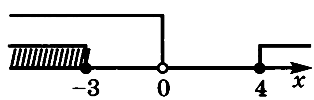


Рис. 250

Геометрическая иллюстрация, представленная на рисунке 250, помогает найти решение первой системы: $x \leqslant -3$.

Во второй системе можно опустить первое неравенство, поскольку оно является следствием третьего неравенства системы. Это позволяет переписать вторую систему в более простом виде:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < -12. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений. Значит, решение совокупности систем неравенств совпадает с решением первой системы: $x \leqslant -3$.

Ответ: а) $x \geqslant 4$; б) $x \leqslant -3$.

4. Неравенства с модулями

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, решаются различными способами. Мы покажем эти способы на достаточно простом примере.

Пример 5. Решить неравенство $|2x - 5| > 4$.

Решение. Первый способ. Имеем:

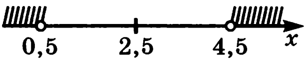


Рис. 251

$$|2(x - 2,5)| > 4;$$

$$2|x - 2,5| > 4;$$

$$|x - 2,5| > 2.$$

Геометрически выражение $|x - 2,5|$ означает расстояние $\rho(x; 2,5)$ на координатной прямой между точками x и 2,5. Значит, нам нужно найти все такие точки x, которые удалены от точки 2,5 более чем на 2, — это точки из промежутков $(-\infty; 0,5)$ и $(4,5; +\infty)$ (рис. 251).

Итак, мы получили следующие решения неравенства:

$$x < 0,5; \qquad x > 4,5.$$

Второй способ. Поскольку обе части заданного неравенства неотрицательны, то по теореме 5 возведение их в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Получим:

$$|2x - 5|^2 > 4^2.$$

Воспользовавшись тем, что $|a|^2 = a^2$, получим:

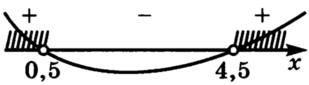


Рис. 252

$$(2x - 5)^2 > 4^2;$$
$$(2x - 5)^2 - 4^2 > 0;$$
$$(2x - 5 - 4)(2x - 5 + 4) > 0;$$
$$(2x - 9)(2x - 1) > 0;$$
$$2(x - 4,5) \cdot 2(x - 0,5) > 0;$$
$$(x - 4,5)(x - 0,5) > 0.$$

Применив метод интервалов (рис. 252), получим: $x < 0,5$; $x > 4,5$.

Третий способ. Выражение $2x - 5$ может быть неотрицательным или отрицательным. Если $2x - 5 \geqslant 0$, то $|2x - 5| = 2x - 5$, и заданное неравенство принимает вид $2x - 5 > 4$.

Если $2x - 5 < 0$, то $|2x - 5| = -(2x - 5)$, и заданное неравенство принимает вид $-(2x - 5) > 4$.

Таким образом, получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0, \\ 2x - 5 > 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 5 < 0, \\ -(2x - 5) > 4. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем:

$$\begin{cases} x \geqslant 2,5, \\ x > 4,5, \end{cases}$$

т. е. $x > 4,5$.

Решая вторую систему, получаем:

$$\begin{cases} x < 2,5, \\ x < 0,5, \end{cases}$$

т. е. $x < 0,5$.

Объединяя найденные решения двух систем неравенств, получаем: $x < 0{,}5$; $x > 4{,}5$.

Ответ: $x < 0{,}5$; $x > 4{,}5$.

Из указанных трех способов наиболее универсальным является третий. Но поскольку он представляется достаточно сложным с технической точки зрения, то, если возможно, стараются использовать второй и первый способы.

Пример 6. Решить неравенство $|x^2 - 3x + 2| \leqslant 2x - x^2$.

Решение. Здесь можно применить два из указанных в предыдущем примере способов решения: 1) рассмотрение двух случаев знака выражения, содержащегося под знаком модуля, и сведение заданного неравенства к совокупности систем неравенств; 2) возведение обеих частей неравенства в квадрат.

Первый способ. Если $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, то

$$|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2,$$

и заданное неравенство принимает вид $x^2 - 3x + 2 \leqslant 2x - x^2$.

Если $x^2 - 3x + 2 < 0$, то $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$, и заданное неравенство принимает вид $-(x^2 - 3x + 2) \leqslant 2x - x^2$.

Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 2x - x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0, \\ -(x^2 - 3x + 2) \leqslant 2x - x^2. \end{cases}$$

1) Решим первое неравенство первой системы. Найдем корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$; получим: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. С помощью метода интервалов (рис. 253) находим решение неравенства:

$$x \leqslant 1, \quad x \geqslant 2.$$

2) Решим второе неравенство первой системы, но сначала преобразуем его к более простому виду: $2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0$. Найдем корни уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. С помощью метода интервалов (рис. 254) находим решение неравенства:

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2.$$

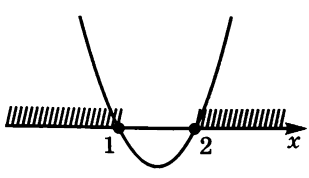


Рис. 253

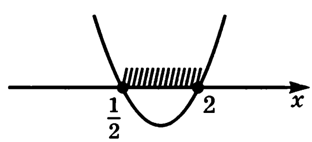


Рис. 254

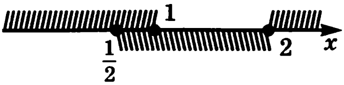


Рис. 255

Рис. 256

3) Отметив найденные решения первого и второго неравенств на координатной прямой, находим пересечение решений (рис. 255): $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$; $x = 2$. Это решение первой системы неравенств.

4) Решим первое неравенство второй системы. С помощью геометрической иллюстрации, представленной на рисунке 253, получаем решение неравенства: $1 < x < 2$.

5) Решим второе неравенство второй системы, но сначала преобразуем его к более простому виду:

$$-(x^2 - 3x + 2) \leqslant 2x - x^2,$$
$$-x^2 + 3x - 2 - 2x + x^2 \leqslant 0,$$
$$x \leqslant 2.$$

6) Отметив найденные решения первого и второго неравенств на координатной прямой, находим пересечение решений (рис. 256): $1 < x < 2$. Это решение второй системы неравенств.

7) Объединив найденные решения систем неравенств

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1;\ x = 2;\ 1 < x < 2,$$

получаем: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

<u>Второй способ</u>. Перепишем данное неравенство в виде

$$2x - x^2 \geqslant |x^2 - 3x + 2| \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $2x - x^2 \geqslant 0$. Значит, обе части заданного неравенства неотрицательны, и мы имеем право возвести их в квадрат. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geqslant 0, \\ |x^2 - 3x + 2|^2 \leqslant (2x - x^2)^2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство этой системы:

$$2x - x^2 \geqslant 0;$$
$$x^2 - 2x \leqslant 0;$$
$$x(x - 2) \leqslant 0,$$

откуда находим (рис. 257): $0 \leqslant x \leqslant 2$.

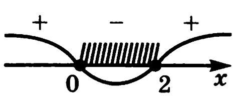


Рис. 257

Решим второе неравенство системы:

$$|x^2 - 3x + 2|^2 \leqslant (2x - x^2)^2;$$
$$(x^2 - 3x + 2)^2 \leqslant (2x - x^2)^2;$$
$$(x^2 - 3x + 2)^2 - (2x - x^2)^2 \leqslant 0;$$

$$((x^2 - 3x + 2) - ((2x - x^2))((x^2 - 3x + 2) + (2x - x^2)) \leqslant 0;$$
$$(2x^2 - 5x + 2)(-x + 2) \leqslant 0;$$
$$(2x^2 - 5x + 2)(x - 2) \geqslant 0.$$

Корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x + 2$ найдены выше: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. С их помощью составим разложение трехчлена на множители:

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Это позволяет переписать последнее неравенство так:

$$2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) \geqslant 0;$$

$$(x - 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0.$$

Отметим точки $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$ на координатной прямой и расставим знаки функции $y = (x - 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ на полученных промежутках (рис. 258). Эта геометрическая иллюстрация позволяет сделать вывод о решении неравенства $(x - 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$; получаем: $x \geqslant \frac{1}{2}$.

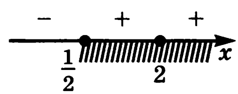


Рис. 258

Итак, для первого неравенства системы получили: $0 \leqslant x \leqslant 2$; для второго неравенства системы получили: $x \geqslant \frac{1}{2}$. Значит, решение системы таково: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

§ 58. Уравнения и неравенства с двумя переменными

Напомним, что **решением уравнения с двумя переменными** $p(x; y) = 0$ называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая обращает уравнение в верное числовое равенство. Например, уравнение $(2x - 6)^2 + (3y + 12)^4 = 0$ имеет только одно решение — пару $(3; -4)$, поскольку сумма двух неотрицательных чисел может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Но, как правило, решений у уравнения с двумя переменными бесконечно много. Например, уравнению $x^2 + y^2 = 9$ удовлетворяет любая пара $(x; y)$ такая, что точка координатной плоскости $M(x; y)$ принадлежит окружности радиусом 3 с центром в начале координат (рис. 259). Переход к геометрической модели — графику уравнения

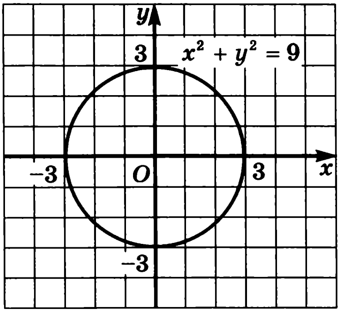


Рис. 259

$p(x; y) = 0$ — является одним из наиболее удобных приемов решения уравнения с двумя переменными.

Если дано целое рациональное уравнение с несколькими переменными и с целочисленными коэффициентами и если поставлена задача найти целочисленные (или, в более общем случае, рациональные) его решения, то говорят, что задано *диофантово уравнение* (в честь древнегреческого математика Диофанта).

В большинстве случаев решение диофантовых уравнений сопряжено со значительными трудностями. Иногда они преодолеваются с помощью теории делимости целых чисел — так будет обстоять дело в следующих ниже двух примерах.

Пример 1. Найти целочисленные решения уравнения

$$3x + 4y = 19.$$

Решение. Выразим из заданного уравнения x, получим: $x = \frac{19 - 4y}{3}$. Нас интересуют лишь целочисленные решения уравнения, поэтому целое число $19 - 4y$ должно делиться без остатка на 3.

Для целого числа y имеются три возможности по отношению к его делимости на число 3: 1) число y делится на 3, т. е. $y = 3k$; 2) число y при делении на 3 дает в остатке 1, т. е. $y = 3k + 1$; 3) число y при делении на 3 дает в остатке 2, т. е. $y = 3k + 2$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Если $y = 3k$, то $19 - 4y = 19 - 12k$; это число на 3 не делится ($12k$ делится на 3, а 19 — нет, значит, разность $19 - 12k$ не делится на 3).

Если $y = 3k + 1$, то $19 - 4y = 19 - 4(3k + 1) = 15 - 12k = 3(5 - 4k)$; это число делится на 3.

Если $y = 3k + 2$, то $19 - 4y = 19 - 4(3k + 2) = 11 - 12k$; это число не делится на 3.

Итак, нас устраивает единственная возможность: $y = 3k + 1$; тогда $x = \frac{19 - 4y}{3} = \frac{3(5 - 4k)}{3} = 5 - 4k$. Значит, целочисленным решением уравнения служит любая пара вида $(5 - 4k;\ 3k + 1)$, где $k \in \mathbb{Z}$. В самом деле, если в уравнение $3x + 4y = 19$ подставить $5 - 4k$ вместо x и $3k + 1$ вместо y, получим: $3(5 - 4k) + 4(3k + 1) = 19$; $19 = 19$ — верное равенство.

Чтобы вам был понятнее полученный результат, дадим параметру k несколько конкретных целочисленных значений.

Пусть $k = 0$; тогда пара $(5 - 4k; 3k + 1)$ превращается в $(5; 1)$. Подставив значения $x = 5$, $y = 1$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим: $15 + 4 = 19$ — верное равенство.

Пусть $k = 1$; тогда пара $(5 - 4k; 3k + 1)$ превращается в $(1; 4)$. Подставив значения $x = 1$, $y = 4$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим: $3 + 16 = 19$ — верное равенство.

Пусть $k = -1$; тогда пара $(5 - 4k; 3k + 1)$ превращается в $(9; -2)$. Подставив значения $x = 9$, $y = -2$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим: $27 - 8 = 19$ — верное равенство.

Так же обстоит дело со всеми остальными целочисленными значениями параметра k.

Ответ: $(5 - 4k; 3k + 1)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Найти целочисленные решения уравнения $9x^2 - 4y^2 = 17$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(3x - 2y)(3x + 2y) = 17$. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Это произведение может равняться 17 лишь в четырех случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 17; когда первый множитель равен -1, а второй -17; когда первый множитель равен 17, а второй 1; когда первый множитель равен -17, а второй -1. Значит, задача сводится к решению совокупности четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 3x + 2y = 17; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 3x + 2y = -17; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 17, \\ 3x + 2y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -17, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим: $x = 3$, $y = 4$; из второй — $x = -3$, $y = -4$; из третьей — $x = 3$, $y = -4$; из четвертой — $x = -3$, $y = 4$.

Ответ: $(3; 4)$, $(-3; -4)$, $(3; -4)$, $(-3; 4)$.

Пример 3. Купили несколько тетрадей в линейку по 8 р. и в клетку по 13 р., затратив на всю покупку 150 р. Сколько куплено тетрадей каждого вида?

Решение. Пусть x — число купленных тетрадей в линейку, а y — число купленных тетрадей в клетку. Тогда математической моделью задачи служит диофантово уравнение $8x + 13y = 150$. По смыслу задачи x может принимать значения 1, 2, 3, ..., 18 (значение $x = 19$ уже не подходит, поскольку $8 \cdot 19 > 150$), а y может принимать значения 1, 2, 3, ..., 11. Конечно, можно решить уравнение подбором, но перебор возможных пар $(x; y)$

состоит из $18 \cdot 11 = 198$ вариантов. Некоторые рассуждения помогут нам упростить этот процесс.

Во-первых, замечаем, что y не может быть нечетным числом, поскольку при нечетном y левая часть уравнения, т. е. $8x + 3y$, — нечетное число, 150 никак не получится. Значит, для y оставляем такие возможности: 2, 4, 6, 8, 10. Впрочем, удобнее представить y в виде $2n$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Во-вторых, переписав уравнение в виде $8x + 13 \cdot 2n = 150$, т. е. $4x + 13n = 75$, замечаем, что n — нечетное число, значит, для n оставляем три возможности: $n = 1, 3, 5$.

Теперь можно заняться вычислениями. Если $n = 1$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 15{,}5$; это нас не устраивает. Если $n = 3$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 9$; это нас устраивает. Если $n = 5$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 2{,}5$; это нас не устраивает.

Итак, $x = 9$ при $n = 3$, т. е. при $y = 6$. Таким образом, уравнение имеет единственное решение (в натуральных числах): $x = 9$, $y = 6$.

Ответ: куплено 9 тетрадей в линейку и 6 тетрадей в клетку.

Теперь поговорим о решении неравенств вида $p(x; y) > 0$ ($p(x; y) < 0$), где $p(x; y)$ — алгебраическое выражение. **Решением неравенства $p(x; y) > 0$** называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому неравенству, т. е. обращает неравенство с переменными $p(x; y) > 0$ в верное числовое неравенство. Например, пара (2; 1) является решением неравенства $2x + 3y > 0$ (поскольку $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство), тогда как пара (0; −1) не является решением этого неравенства.

Чтобы найти все решения неравенства с двумя переменными, чаще всего опираются на график уравнения $p(x; y) = 0$. Как рассуждают дальше, покажем на примерах.

Пример 4. Решить неравенство $2x + 3y > 0$.

Р е ш е н и е. Графиком уравнения $2x + 3y = 0$ является прямая, проходящая через начало координат (0; 0) и, например, точку (3; −2) (координаты обеих точек удовлетворяют уравнению $2x + 3y = 0$). Эта прямая изображена на рис. 260. Все решения заданного неравенства геометрически изображаются точками полуплоскости, расположенной либо выше, либо ниже построенной прямой. Чтобы правильно выбрать нужную полуплоскость, возьмем любую точку одной из них и подставим координаты такой контрольной точки в заданное неравенство. Если получится верное числовое неравенство, то полуплоскость выбрана верно, если нет, то неверно.

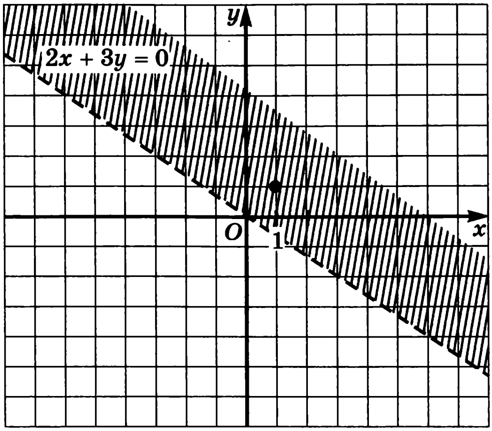


Рис. 260

Возьмем в качестве контрольной точку (1; 1) из верхней полуплоскости и подставим ее координаты в заданное неравенство. Получим $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство.

Итак, геометрической моделью решений заданного неравенства является полуплоскость, расположенная выше прямой $2x + 3y = 0$ (рис. 260).

Пример 5. Решить неравенство $xy < 2$.

Решение. Если $x = 0$, то неравенство принимает вид $0 < 2$, это верное неравенство, значит, все точки оси y (прямая $x = 0$) принадлежат множеству решений неравенства. Если $x > 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y < \frac{2}{x}$. Значит, в правой полуплоскости (при $x > 0$) следует взять точки, лежащие ниже правой ветви гиперболы $y = \frac{2}{x}$. Если $x < 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y > \frac{2}{x}$. Значит, в левой полуплоскости (при $x < 0$) следует взять точки, лежащие выше левой ветви гиперболы. Множество решений неравенства $xy < 2$ изображено на рисунке 261.

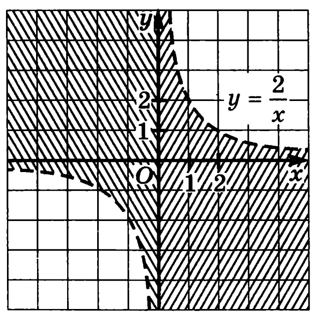


Рис. 261

Выше мы говорили о решении неравенств с двумя переменными. Развивая эту линию, можно рассматривать

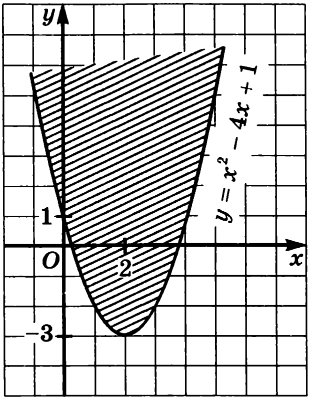


Рис. 262

и системы неравенств с двумя переменными. *Решить систему неравенств с двумя переменными* — это значит (с геометрической точки зрения) найти множество всех таких точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют *одновременно всем* неравенствам системы, т. е. речь идет о *пересечении* решений неравенств системы.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x + 1, \\ y \leqslant x - 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Надо найти пересечение множества решений неравенства $y \geqslant x^2 - 4x + 1$ (рис. 262) и неравенства $y \leqslant x - 3$ (рис. 263). Искомое множество решений изображено на рисунке 264 — *параболический сегмент.*

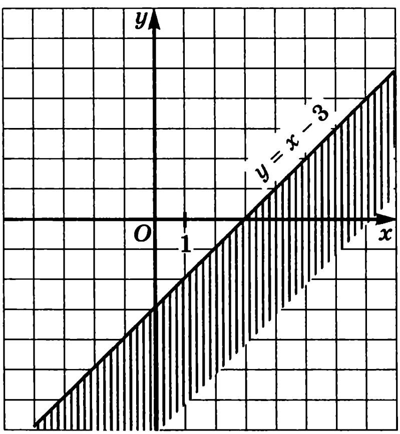


Рис. 263

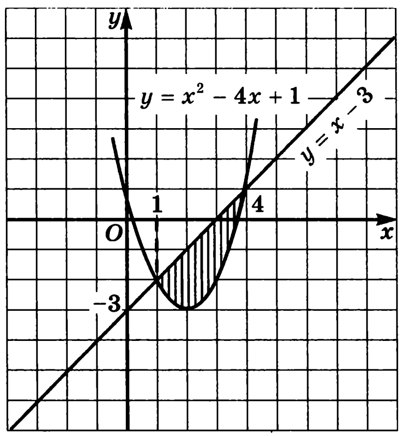


Рис. 264

§ 59. Системы уравнений

В курсе алгебры 7—9-го классов вы неоднократно встречались с системами двух рациональных уравнений с двумя переменными. Для их решения мы использовали метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод. В этом параграфе мы несколько расширим представления о решении систем уравнений.

Определение 1. Если поставлена задача — найти такие пары значений $(x;\ y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x;\ y) = 0$ и уравнению $q(x;\ y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют **систему уравнений**

$$\begin{cases} p(x;\ y) = 0, \\ q(x;\ y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений $(x;\ y)$, которая одновременно является решением и первого и второго уравнений системы, называют *решением системы уравнений*. Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Можно говорить и о системе из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} p(x;\ y;\ z) = 0, \\ q(x;\ y;\ z) = 0, \\ r(x;\ y;\ z) = 0. \end{cases}$$

В этом случае речь идет об отыскании троек чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы. Вообще можно говорить о системе, содержащей любое число уравнений с любым числом переменных.

Вы знаете, что основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. Если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка найденных корней, поскольку среди них могут оказаться посторонние для заданного уравнения. Так же обстоит дело и при решении систем уравнений.

Определение 2. Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые вы изучили ранее, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы мы применяли неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы, или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}, \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}. \end{cases}$

Решение. Перемножив уравнения системы, получим:

$$(xy - 6)(xy + 24) = \frac{y^3}{x} \cdot \frac{x^3}{y};$$

$$(xy - 6)(xy + 24) = x^2y^2.$$

Введем новую переменную $z = xy$. Получим: $(z - 6)(z + 24) = z^2$; решив это уравнение, находим: $z = 8$, т. е. $xy = 8$.

Итак, перемножив оба уравнения системы, мы получили довольно простую зависимость между переменными: $xy = 8$. Это уравнение рассмотрим совместно с одним из уравнений исходной системы, например с первым:

$$\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Теперь можно воспользоваться методом подстановки. Выразим из второго уравнения x через y и подставим полученное выражение вместо x в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 8 - 6 = y^3 : \left(\dfrac{8}{y}\right), \\ x = \dfrac{8}{y}. \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение принимает вид $y^4 = 16$, откуда получаем: $y_1 = 2$, $y_2 = -2$. Используя соотношение $x = \dfrac{8}{y}$, находим соответственно: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Итак, получили два решения: (4; 2), (−4; −2). Но поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» (с точки зрения равносильности) метод умножения уравнений системы, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему.

Подставив $x = 4$, $y = 2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8 - 6 = \dfrac{2^3}{4}, \\ 8 + 24 = \dfrac{4^3}{2}; \end{cases}$$

это два верных числовых равенства.

Подставив $x = -4$, $y = -2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8 - 6 = \dfrac{(-2)^3}{-4}, \\ 8 + 24 = \dfrac{(-4)^3}{-2}; \end{cases}$$

это тоже два верных числовых равенства.

Значит, обе найденные пары удовлетворяют заданной системе уравнений.

Ответ: (4; 2), (−4; −2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x - 2y}} = 2, \\ 4y^2 - 1 = 3y(x - 1). \end{cases}$$

Решение. Введем новую переменную: $z = \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}$. Тогда первое уравнение системы примет вид $z + \dfrac{1}{z} = 2$. Решим это уравнение:

$$z^2 + 1 = 2z;\ \ z^2 - 2z + 1 = 0;\ \ (z - 1)^2 = 0;\ \ z = 1.$$

Возвращаясь к переменным x, y, получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = 1.$$

Поработаем с этим уравнением:

$$\frac{3x-2y}{2x} = 1^2; \quad 3x - 2y = 2x; \quad x = 2y.$$

Итак, первое уравнение системы нам удалось заменить более простым уравнением: $x = 2y$. Рассмотрев его совместно со вторым уравнением заданной системы, получим более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - 1 = 3y(x - 1), \end{cases}$$

для решения которой «напрашивается» метод подстановки, поскольку уже имеется готовое выражение переменной x через переменную y. Подставив $2y$ вместо x во второе уравнение системы, получим:

$$4y^2 - 1 = 3y(2y - 1);$$
$$4y^2 - 1 = 6y^2 - 3y;$$
$$2y^2 - 3y + 1 = 0;$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $x = 2y$, то получаем соответственно: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Итак, получили два решения: $(2; 1)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Но, поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» с точки зрения равносильности метод — возведение в квадрат обеих частей одного из уравнений, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему. Эта проверка показывает, что посторонних решений нет.

Ответ: $(2; 1)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 3. Составить уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки $(1; 1)$, $(2; 2)$ и $(-1; 11)$.

Решение. Речь идет о нахождении коэффициентов a, b, c.

По условию парабола проходит через точку $(1; 1)$. Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 1$, $y = 1$, получим:

$$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c;$$
$$a + b + c = 1.$$

По условию парабола проходит через точку $(2; 2)$. Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 2$, $y = 2$, получим:

$$2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c;$$
$$4a + 2b + c = 2.$$

По условию парабола проходит через точку $(-1; 11)$. Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = -1$, $y = 11$, получим:

$$11 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c;$$
$$a - b + c = 11.$$

В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя переменными a, b, c:

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = 2, \\ a - b + c = 11. \end{cases}$$

Выразим c из первого уравнения: $c = 1 - a - b$. Подставим полученное выражение вместо c во второе и третье уравнения системы:

$$4a + 2b + (1 - a - b) = 2;$$
$$3a + b = 1;$$

и соответственно

$$a - b + (1 - a - b) = 11;$$
$$-2b = 10;$$
$$b = -5.$$

Фактически мы получили более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} b = -5, \\ 3a + b = 1, \\ c = 1 - a - b. \end{cases}$$

Подставив значение $b = -5$ во второе уравнение, получим: $a = 2$. Подставив найденные значения $a = 2$, $b = -5$ в третье уравнение, получим: $c = 4$. Остается подставить найденные значения $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$ в уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Ответ: $y = 2x^2 - 5x + 4$.

Пример 4. Три трактора вспахивают поле. Чтобы вспахать все поле, первому трактору требуется времени на 1 ч больше, чем второму, и на 2 ч меньше, чем третьему. Первый и третий тракторы при совместной работе вспашут все поле за 2 ч 24 мин. Сколько времени уйдет на вспашку поля при совместной работе трех тракторов?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Напомним, что если речь идет о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане, т. е. не сказано, сколько деталей надо сделать, сколько гектаров земли вспахать и т. д., то объем работы считают равным 1, а части работы выражают в долях единицы.

Пусть x ч — время, необходимое первому трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

y ч — время, необходимое второму трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

z ч — время, необходимое третьему трактору, чтобы вспахать поле в одиночку.

Тогда согласно условиям задачи $x - y = 1$, $z - x = 2$.

Если все поле (т. е. 1) первый трактор может вспахать за x ч, то за 1 ч он вспашет часть поля, выражаемую дробью $\frac{1}{x}$:

$\frac{1}{x}$ — часть поля, которую вспашет 1-й трактор за 1 ч.

Аналогично,

$\frac{1}{y}$ — часть поля, которую вспашет 2-й трактор за 1 ч;

$\frac{1}{z}$ — часть поля, которую вспашет 3-й трактор за 1 ч.

По условию, работая вместе, первый и третий тракторы могут вспахать все поле за 2 ч 24 мин, т. е. за $\frac{12}{5}$ ч. Это значит, что $\frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 1$, т. е. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}$.

В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ z - x = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

<u>Второй этап</u>. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим z через x из второго уравнения системы: $z = x + 2$. Подставим выражение $x + 2$ вместо z в третье уравнение системы: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$. Решая это рациональное уравнение, последовательно получаем:

$$\frac{1^{\backslash 12(x+2)}}{x} + \frac{1^{\backslash 12x}}{x + 2} = \frac{5^{\backslash x(x+2)}}{12};$$

$$12x + 24 + 12x = 5x^2 + 10x;$$

$$5x^2 - 14x - 24 = 0;$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -\frac{6}{5}.$$

Оба найденных значения принадлежат ОДЗ рационального уравнения: $x + 2 \neq 0$, $x \neq 0$, — т. е. являются корнями рационального уравнения.

Осталось найти соответствующие значения y и z. Для этого воспользуемся уравнениями $x - y = 1$ и $z - x = 2$.

Если $x = 4$, то из этих уравнений находим: $y = 3$, $z = 6$; если $x = -\frac{6}{5}$, то из тех же уравнений находим: $y = -\frac{11}{5}$, $z = \frac{4}{5}$.

Итак, составленная система уравнений имеет два решения: (4; 3; 6) и $\left(-\frac{6}{5}; -\frac{11}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Во-первых, по смыслу задачи отрицательные значения переменных нас не устраивают, следовательно, оставляем только одну тройку значений (4; 3; 6).

Во-вторых, нас спрашивают, сколько времени уйдет на вспашку поля при совместной работе трех тракторов? Будем рассуждать так.

За 1 ч первый трактор вспашет $\frac{1}{4}$ часть поля, второй — $\frac{1}{3}$, третий — $\frac{1}{6}$. Значит, при совместной работе они вспашут за 1 ч часть поля, выражаемую суммой трех дробей, т. е. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, а за t ч соответственно $t\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$, т. е. $\frac{3t}{4}$. Если они вспашут все поле, то $\frac{3t}{4} = 1$, откуда $t = \frac{4}{3}$.

Осталось лишь уточнить, что $\frac{4}{3}$ ч = 1 ч 20 мин.

Ответ: 1 ч 20 мин.

§ 60. Уравнения и неравенства с параметрами

Если уравнение $f(x; a) = 0$ надо решить относительно переменной x, а буквой a обозначено произвольное действительное число, то $f(x; a) = 0$ называют **уравнением с параметром** $\boldsymbol{a}$. Основная трудность, связанная с решением уравнений (и тем более неравенств) с параметром, состоит в следующем. При одних значениях параметра уравнение не имеет корней, при других — имеет бесконечно много корней, при третьих — оно решается по одним формулам, при четвертых — по другим. Как все это учесть? Сразу скажем, что решению уравнений и неравенств с параметрами посвящена масса учебно-методической литературы. Наша задача весьма скромна: завершая изучение курса алгебры в школе, дать вам некоторые представления о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами. Для этого рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Решить относительно x:
а) уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$;
б) неравенство $2a(a - 2)x > a - 2$.

Р е ш е н и е. а) Корень уравнения вида $bx = c$ мы находим без труда: $x = \frac{c}{b}$, поскольку в конкретном уравнении коэффициент b обычно отличен от нуля. В заданном уравнении коэффициент при x равен $2a(a - 2)$. Значение параметра a нам неизвестно, и в принципе оно может быть любым. Поэтому следует подстраховаться, т. е. сначала предусмотреть возможность обращения указанного коэффициента в нуль.

Рассмотрим следующие случаи:

$$1)\ a = 0;\quad 2)\ a = 2;\quad 3)\ a \neq 0,\ a \neq 2.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$; это уравнение не имеет корней.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$; этому уравнению удовлетворяют любые значения переменной x.

В третьем случае (при $a \neq 0$, $a \neq 2$) коэффициент при x отличен от нуля и, следовательно, на этот коэффициент можно разделить обе части уравнения. Получим: $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$, т. е. $x = \frac{1}{2a}$.

б) Решая неравенство, нужно учитывать знак коэффициента при x. Поэтому для решения заданного неравенства нужно рассмотреть не три случая, как это было в пункте а), а пять:

$$1)\ a = 0;\quad 2)\ a = 2;\quad 3)\ a < 0;\quad 4)\ 0 < a < 2;\quad 5)\ a > 2.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > -2$; этому неравенству удовлетворяют любые значения переменной x.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > 0$; это неравенство не имеет решений.

В третьем случае (при $a < 0$) коэффициент $2a(a - 2)$ положителен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует оставить таким, каким он был:

$$x > \frac{a - 2}{2a(a - 2)},\ \text{т. е. } x > \frac{1}{2a}.$$

Сразу заметим, что так же будет обстоять дело и в пятом случае (при $a > 2$). В этом случае, как и в третьем, коэффициент $2a(a - 2)$ положителен и, решая заданное неравенство, получим: $x > \frac{1}{2a}$.

Осталось рассмотреть четвертый случай, когда $0 < a < 2$. В этом случае коэффициент $2a(a - 2)$ отрицателен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует изменить на противоположный:

$$x < \frac{a-2}{2a(a-2)}, \text{ т. е. } x < \frac{1}{2a}.$$

Ответ: а) Если $a = 0$, то корней нет; если $a = 2$, то x — любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$. б) Если $a = 2$, то решений нет; если $a = 0$, то x — любое действительное число; если $a < 0$ или $a > 2$, то $x > \frac{1}{2a}$; если $0 < a < 2$, то $x < \frac{1}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0.$$

Решение. По виду это уравнение представляется квадратным. Но (внимание!) значение параметра a нам неизвестно, и оно вполне может оказаться равным 1; в этом случае коэффициент при x^2 обращается в нуль, и уравнение не будет квадратным, оно будет линейным. Квадратные и линейные уравнения решаются по различным алгоритмам.

Итак, нам следует рассмотреть два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

В первом случае (при $a = 1$) уравнение принимает следующий вид: $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т. е. $6x + 7 = 0$. Решив это линейное уравнение, получим: $x = -\frac{7}{6}$.

Во втором случае (при $a \neq 1$) мы имеем квадратное уравнение:

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0.$$

Найдем его дискриминант:

$$D = (2(2a+1))^2 - 4(a-1)(4a+3) = 4(4a^2 + 4a + 1) -$$
$$- 4(4a^2 - a - 3) = 20a + 16 = 4(5a+4).$$

Итак, $D = 4(5a + 4)$.

Дальнейшие рассуждения зависят от знака дискриминанта. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два корня. Дискриминант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$, положителен при $a > -\frac{4}{5}$, отрицателен при $a < -\frac{4}{5}$. Именно эти три случая нам и предстоит теперь рассмотреть.

Начнем со случая, когда $a < -\frac{4}{5}$. В этом случае $D < 0$, и следовательно, квадратное уравнение не имеет корней.

Пусть теперь $a > -\frac{4}{5}$ (но, напомним, $a \neq 1$). В этом случае $D > 0$, и следовательно, квадратное уравнение имеет два корня, которые мы найдем по известной формуле корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-2(2a+1) \pm \sqrt{4(5a+4)}}{2(a-1)}.$$

Полученное выражение можно упростить, если вынести из-под знака квадратного корня множитель 2 и сократить дробь на 2. Получим:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $a = -\frac{4}{5}$. Используя написанную формулу для корней квадратного уравнения, получаем:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\left(2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 1\right) \pm \sqrt{0}}{-\frac{4}{5} - 1} = \frac{-\left(-\frac{8}{5} + 1\right)}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет; если $a > -\frac{4}{5}$ (но $a \neq 1$), то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-a} = 2a - x$.

Решение. Сначала будем действовать по стандартной схеме — возведем обе части заданного иррационального уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$$\left(\sqrt{x-a}\right)^2 = (2a - x)^2;$$
$$x - a = 4a^2 - 4ax + x^2;$$
$$x^2 - (4a+1)x + 4a^2 + a = 0.$$

Найдем дискриминант: $D = (4a+1)^2 - 4(4a^2 + a) = 4a + 1$. Если $D < 0$, т. е. $a < -\frac{1}{4}$, то корней нет. Если $D = 0$, т. е. $a = -\frac{1}{4}$, квадратное уравнение принимает вид $x^2 = 0$, т. е. $x = 0$. Но при $x = 0$, $a = -\frac{1}{4}$ исходное уравнение обращается в неверное равенство:

$\sqrt{0 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} - 0$. Значит, и в этом случае данное уравнение не имеет корней. Если $D > 0$, т. е. $a > -\frac{1}{4}$, то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{4a + 1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

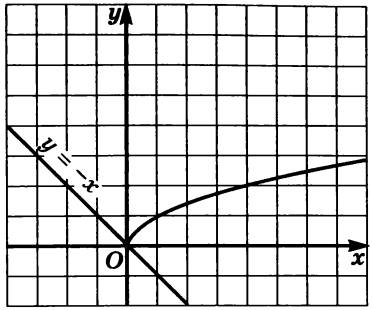


Рис. 265

Теперь надо выполнить проверку, подставляя поочередно каждый из найденных корней в исходное уравнение. Эта проверка, как нетрудно догадаться, будет весьма и весьма сложной. Выберем другой способ — графический: построим графики функций $y = \sqrt{x - a}$ и $y = 2a - x$ и найдем точки их пересечения. При этом целесообразно рассмотреть три случая:

$$a = 0, \quad a < 0, \quad a > 0.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x} = -x$. Построив графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ (рис. 265), убеждаемся, что они имеют одну общую точку (0; 0), а потому уравнение имеет только один корень: $x = 0$.

Во втором случае (при $a < 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ не пересекаются (рис. 266); значит, заданное уравнение не имеет корней.

В третьем случае (при $a > 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ пересекаются в одной точке (рис. 267); значит, заданное уравнение имеет один корень. Следовательно, из двух полученных выше корней один является посторонним. Какой? Ответ можно

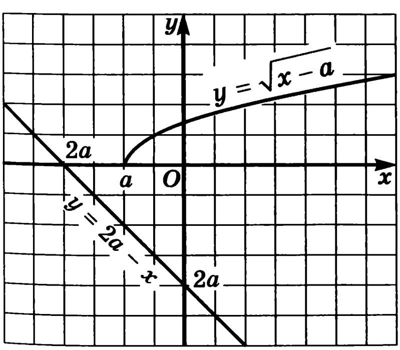


Рис. 266

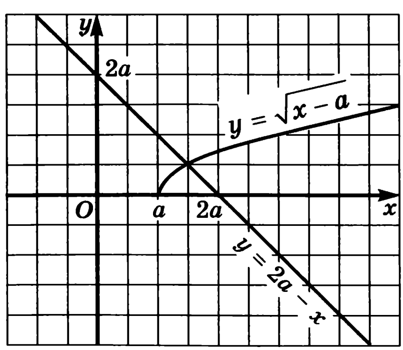


Рис. 267

почерпнуть из графической иллюстрации, представленной на рисунке 267. Абсцисса точки пересечения графиков меньше, чем $2a$ ($2a$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2a - x$ с осью x). Из двух найденных корней: $x_1 = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$ и $x_2 = \frac{4a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$ — второй больше, чем $2a$; чтобы в этом убедиться, достаточно переписать второй корень так: $x_2 = 2a + \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Значит, x_2 — посторонний корень.

Итак, если $a > 0$, то заданное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Ответ: если $a < 0$, то корней нет;
если $a = 0$, то $x = 0$;
если $a > 0$, то $x = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

Замечание. В только что решенном примере ответ можно записать компактнее. Дело в том, что записанная при $a > 0$ формула корня уравнения пригодна и для случая $a = 0$; в самом деле, если $a = 0$, то по указанной формуле получаем: $x = 0$. Поэтому ответ можно было записать так: если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то $x = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

Пример 4. При каких значениях параметра a корни уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ меньше 1?

Решение. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $-2x - 2 = 0$; корень этого уравнения $x = -1$ удовлетворяет заданному условию, он меньше 1.

Если $a \neq 0$, то заданное уравнение является квадратным. Графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2ax^2 - 2x - 3a - 2$, является парабола с ветвями вверх, если $2a > 0$, и ветвями вниз, если $2a < 0$.

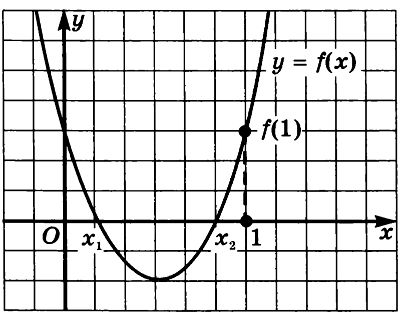


Рис. 268

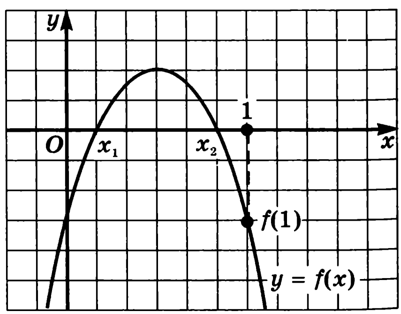


Рис. 269

Поскольку корни уравнения, по условию, должны быть меньше 1, упомянутая выше парабола должна располагаться в координатной плоскости так, как изображено на рисунке 268 (для случая $2a > 0$) или на рисунке 269 (для случая $2a < 0$).

Дадим аналитическое описание геометрической модели, представленной на рисунке 268. Во-первых, напомним, при $2a > 0$ ветви параболы направлены вверх. Во-вторых, парабола обязательно пересекается с осью абсцисс (в крайнем случае касается ее), иначе у квадратного уравнения не будет корней. Корни есть, значит, дискриминант D неотрицателен, т. е. $D \geqslant 0$. В-третьих, в точке $x = 1$ имеем: $f(1) > 0$. В-четвертых, $f'(1) > 0$, поскольку касательная к параболе в точке $x = 1$ составляет с осью абсцисс острый угол.

Итак, получаем систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рисунке 268:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) > 0, \\ f'(1) > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Аналогичные рассуждения позволяют составить вторую систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рисунке 269:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) < 0, \\ f'(1) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решим систему неравенств (1). Составим выражение для дискриминанта D квадратного трехчлена $2ax^2 - 2x - 3a - 2$:

$$D = 4 - 4 \cdot 2a \cdot (-3a - 2) = 24a^2 + 16a + 4.$$

Составим выражение для $f(1)$:

$$f(1) = 2a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3a - 2 = -a - 4.$$

Составим выражение для $f'(1)$:

$$f'(x) = (2ax^2 - 2x - 3a - 2)' = 2a \cdot 2x - 2 = 4ax - 2;$$
$$f'(1) = 4a - 2.$$

Таким образом, для системы (1) получаем:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geqslant 0, \\ -a - 4 > 0, \\ 4a - 2 > 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства этой системы следует, что $a > 0$, а из третьего следует, что $a < -4$. Значит, система не имеет решений.

Для системы (2) получаем:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geqslant 0, \\ -a - 4 < 0, \\ 4a - 2 < 0. \end{cases}$$

Сразу обратим внимание на то, что квадратный трехчлен $24a^2 + 16a + 4$ имеет отрицательный дискриминант ($D = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 24 < 0$) и положительный старший коэффициент. Значит, при всех значениях a выполняется неравенство $24a^2 + 16a + 4 > 0$, а потому квадратное неравенство в данной системе неравенств можно отбросить. Далее имеем:

$$\begin{cases} a < 0, \\ a > -4, \\ a < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение этой системы достаточно очевидно: $-4 < a < 0$. Итак, мы нашли все интересующие нас значения параметра a:

$$a = 0; \quad -4 < a < 0.$$

Ответ: $-4 < a \leqslant 0$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

3 часа в неделю в 1-м полугодии,
2 часа в неделю во 2-м полугодии

10 класс

1-е полугодие (48 часов)

Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава 1. Числовые функции	
§ 1. Определение числовой функции и способы ее задания	2
§ 2. Свойства функций	2
§ 3. Обратная функция	1
Итого:	5
Глава 2. Тригонометрические функции	
§ 4. Числовая окружность	2
§ 5. Числовая окружность на координатной плоскости	2
Контрольная работа № 1	1
§ 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс	2
§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента	2
§ 8. Тригонометрические функции углового аргумента	1
§ 9. Формулы приведения	2
Контрольная работа № 2	1
§ 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график	2
§ 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график	2
§ 12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$	1
§ 13. Преобразования графиков тригонометрических функций	2
§ 14. Функции $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, их свойства и графики	2
Контрольная работа № 3	1
Итого:	23
Глава 3. Тригонометрические уравнения	
§ 15. Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$	2
§ 16. Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$	2

Изучаемый материал	Кол-во часов
§ 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$	1
§ 18. Тригонометрические уравнения	3
Контрольная работа № 4	1
Итого:	9
Глава 4. Преобразование тригонометрических выражений	
§ 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов	2
§ 20. Тангенс суммы и разности аргументов	1
§ 21. Формулы двойного аргумента	2
§ 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения	3
Контрольная работа № 5	1
§ 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы	2
Итого:	11

2-е полугодие (34 часа)

Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава 5. Производная	
§ 24. Числовые последовательности и их свойства. Предел последовательности	1
§ 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии	1
§ 26. Предел функции	3
§ 27. Определение производной	3
§ 28. Вычисление производных	3
Контрольная работа № 6	1
§ 29. Уравнение касательной к графику функции	2
§ 30. Применение производной для исследований функций на монотонность и экстремумы	3
§ 31. Построение графиков функций	3
Контрольная работа № 7	1
§ 32. Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке	2
Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин	3
Контрольная работа № 8	2
Итого:	28
Повторение	6

11 класс

1-е полугодие (48 часов)

Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава 6. Степени и корни. Степенные функции	
§ 33. Понятие корня n-й степени из действительного числа	2
§ 34. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики	2
§ 35. Свойства корня n-й степени	2
§ 36. Преобразование выражений, содержащих радикалы	3
Контрольная работа № 1	1
§ 37. Обобщение понятия о показателе степени	2
§ 38. Степенные функции, их свойства и гарфики	3
Итого:	15
Глава 7. Показательная и логарифмическая функции	
§ 39. Показательная функция, ее свойства и график	3
§ 40. Показательные уравнения и неравенства	3
Контрольная работа № 2	1
§ 41. Понятие логарифма	1
§ 42. Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график	2
§ 43. Свойства логарифмов	2
§ 44. Логарифмические уравнения	3
Контрольная работа № 3	1
§ 45. Логарифмические неравенства	3
§ 46. Переход к новому основанию логарифма	2
§ 47. Дифференцирование показательной и логарифмической функций	2
Контрольная работа № 4	1
Итого:	24
Глава 8. Первообразная и интеграл	
§ 48. Первообразная	3
§ 49. Определенный интеграл	3
Контрольная работа № 5	1
Резервные уроки	2
Итого:	9

2-е полугодие (34 часа)

Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей	
§ 50. Статистическая обработка данных	2
§ 51. Простейшие вероятностные задачи	2
§ 52. Сочетания и размещения	2
§ 53. Формула бинома Ньютона	2
§ 54. Случайные события и их вероятности	2
Контрольная работа № 6	1
Итого:	11
Глава 10. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств	
§ 55. Равносильность уравнений	2
§ 56. Общие методы решения уравнений	3
§ 57. Решение неравенств с одной переменной	3
§ 58. Уравнения и неравенства с двумя переменными	1
§ 59. Системы уравнений	3
§ 60. Уравнения и неравенства с параметрами	3
Контрольная работа № 7	2
Итого:	17
Повторение	6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 5. *Производная*

ГЛАВА 6. *Степени и корни. Степенные функции*

ГЛАВА 7. *Показательная и логарифмическая функции*

ГЛАВА 8. *Первообразная и интеграл*

ГЛАВА 9. *Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей*

ГЛАВА 10. ***Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств***

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА 10—11 классы

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений
(базовый уровень)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректор *Л. В. Аввакумова*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.

Подписано в печать 15.06.09. Формат 60×90$\frac{1}{16}$. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,0.
Доп. тираж 100 000 экз. Заказ № 23140 (к см).

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.